CINEMATICA - LA ECUACIÓN COMPLEMENTARIA

Hay una fórmula que se puede usar en cinemática para resolver los problemas. Se la suele llamar ecuación complementaria. La fórmula es ésta:

$$\boxed{V_f^{\,2} - V_0^{\,2} = 2\ a\ (X_f - X_0)} \Leftarrow$$

ECUACION COMPLEMENTARIA

Esta ecuación vendría a ser una mezcla entre la 1^{ra} y la 2^{da} ecuación horaria. La deducción es un poco larga y no la voy a poner acá, pero te puedo explicar de dónde sale. Fijate. Escribo las 2 primeras ecuaciones horarias. Despejo <u>t</u> de la 2^{da} y lo reemplazo en la 1^{ra}.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + a \cdot t \qquad \Rightarrow \quad t = \dfrac{v_f - v_0}{a} \end{cases}$$

REEMPLAZO

Si te tomás el trabajex de reemplazar el choclazo y de hacer todos los pasos que siguen, termina quedándote la famosa ecuación complementaria. Me gustaría que veas algunas cositas sobre esta ecuación:

<u>Primero</u>:
Las ecuaciones horarias se llaman así porque en ellas aparece el tiempo. (El tiempo = la hora). La ecuación complementaria **<u>NO es una ecuación horaria</u>**. En ella no aparece el tiempo.

<u>Segundo</u>: Esta ecuación no es una nueva fórmula. Es mezcla de las otras dos ecuaciones

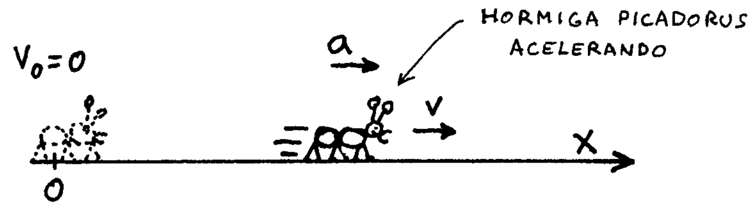
<u>Tercero</u>:
Nunca es absolutamente imprescindible usar la ecuación complementaria para resolver un problema. **<u>Todo</u>** problema de MRUV tiene que poder resolverse usando solamente la 1^a y la 2^a ecuación horaria. Lo que tiene de bueno la expresión $V_f^{\,2} - V_0^{\,2} = 2\ a\ (X_f - X_0)$ es que permite calcular lo que a uno le piden sin tener el tiempo. Es decir, facilita las cuentas cuando uno tiene que resolver un problema en donde **<u>el tiempo no es dato</u>**. Resumiendo: La ecuación complementaria ahorra cuentas. Eso es todo.

UN EJEMPLO DE MRUV USANDO LA ECUACION COMPLEMENTARIA

Una hormiga picadorus sale de la posición $X_0 = 0$ con velocidad inicial cero y comienza a moverse con aceleración $a = 2\ m/s^2$.

a) - Escribir las ecuaciones horarias.
b) - Hacer los gráficos $x_{(t)}$, $v_{(t)}$ y $a_{(t)}$.
c) - Calcular la velocidad que tiene la hormiga picadorus después de recorrer 1 m.

Voy a hacer un esquema de lo que pasa y tomo un sistema de referencia:



a) - Las ecuaciones horarias para una cosa que se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente variado son:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

⇦ ECUACIONES HORARIAS

x_0 y v_0 valen cero. Reemplazando por los otros datos el asunto queda así:

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}\, 2 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ v_f = 0 + 2 \frac{m}{s^2} \cdot t \\ a = 2 \frac{m}{s^2} = cte \end{cases}$$

← Ecuaciones horarias para la hormiga

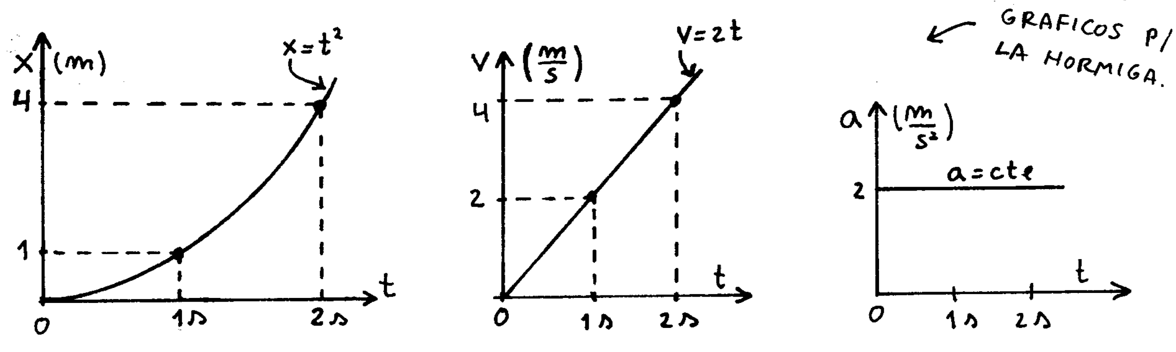
Ahora, dando valores a t voy sacando los valores de equis y de v. Hago esta tabla:

X	t
0	0
1 m	1 s
4 m	2 s

V	t
0	0
2 m/s	1 s
4 m/s	2 s

a	t
2 m/s^2	0
2 m/s^2	1 s
2 m/s^2	2 s

b) - Teniendo la tabla puedo representar las ecuaciones horarias.



c) – Calculo la velocidad que tiene la hormiga picadorus después de recorrer 1 m.

Lo hago primero **SIN** usar la ecuación complementaria. Escribo las ecuaciones horarias:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

De la 2ª ecuación horaria : $v_f = v_0 + a\,.t$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_f - \overbrace{v_0}^{0}}{a}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_f}{2\,m/s} \qquad \leftarrow$$

Tiempo que tardó la picadorus en recorrer 1 m

La 1ª ec. horaria era : $x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$

$$\Rightarrow \quad 1m = 0 + 0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot 2 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Reemplazando t por $\dfrac{v_f}{2\,m/s^2}$: $\quad 1m = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \dfrac{m}{s^2} \cdot \left(\dfrac{v_f}{2\,m/s^2} \right)^2$

$$\Rightarrow \quad 1m = \frac{m}{s^2} \cdot \frac{s^4}{m^2} \cdot \frac{{v_f}^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad v_f = 2\,m/s \quad \text{(verifica)}$$

Lo resuelvo ahora usando la ecuación complementaria. Fijate :

$$v_f^2 - v_0^2 = 2\,a\,.(x_f - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 - 0 = 2\,.\,2 \frac{m}{s^2} .(1\,m - 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_f = 2\,m/s} \quad \Leftarrow$$

VELOCIDAD FINAL

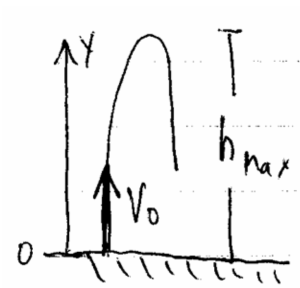
Como ves, usando la ecuación complementaria uno se ahorra un montón de trabajo.
¿ Por qué ?
Rta: Porque no hace falta calcular el tiempo.

UN EJEMPLO DE CAIDA LIBRE USANDO LA ECUACION COMPLEMENTARIA

Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba con cierta velocidad inicial V_0 que le permite alcanzar una cierta altura máxima h. ¿ A qué altura del suelo está el objeto en el instante en que su velocidad es la mitad de la velocidad inicial ?

SOLUCIÓN

En este problema los datos están todos con letras. Yo lo voy a resolver con letras. Si te resulta muy complicado podés darle valores. (Por ejemplo, h_{MAX} = 100 m)
Hagamos un dibujito.



ESQUEMA DEL
TIRO VERTICAL

Planteo la ecuación complementaria para la velocidad. $V_F^2 - V_O^2 = 2\,a\,(Y_F - Y_0)$. La ecuación complementaria se usa en MRUV y un tiro vertical también es un MRUV, así que también se puede usar. Me queda :

$$\overset{0}{\cancel{V_F}}{}^2 - V_0^2 = 2\,g\,h_{max} \Rightarrow H_{max} = \frac{-V_0^2}{2g}$$

$$\text{Si } V_F = \frac{V_0}{2}\ ; \Rightarrow V_0^2 = -\,2\,H_{max}\,g \quad (1)$$

Ahora hago algunas cuentas:

$$V_f^2 - V_0^2 = 2\,g\,h \Rightarrow \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 - V_0^2 = 2\,g\,h$$

$$\frac{V_0^2}{4} - V_0^2 = 2\,g\,h \Rightarrow -\frac{3V_0^2}{4} = 2\,g\,h \Rightarrow h = \frac{-3V_0^2}{8g}$$

$$\text{Por } (1)\quad V_0^2 = -\,2\,H_{max}\,g \Rightarrow h = \cancel{-}3\,\frac{(\cancel{-}2\,H_{max}\cancel{g})}{8\cancel{g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{3}{4}\,H_{max}}$$