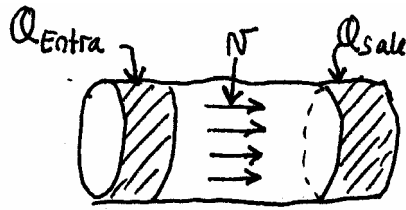


HIDRODINAMICA - ECUACION DE CONTINUIDAD

CLASE DE ANIBAL PARA FOTOCOPIAR



$$Q_{Entra} = Q_{sale}$$

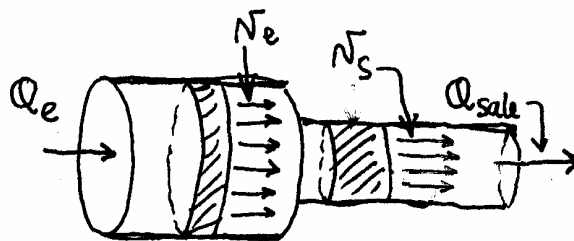
Todo lo que entra, tiene que salir. Si entran 5 litros por minuto, tienen que estar saliendo 5 litros por minuto. El caudal que entra es igual al caudal que sale. Como al caudal lo puedo poner como Velocidad x Superficie, la fórmula que me queda es :

$$N_e \cdot S_e = N_s \cdot S_s$$

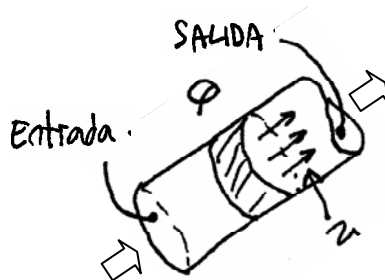


ECUACION DE CONTINUIDAD

En esta fórmula V_e es la velocidad del líquido a la entrada y S_e es la sección (= superficie) del caño a la entrada. Lo mismo con V_s y S_s para la salida. El nombre "continuidad" significa algo así como que "el caudal siempre es continuo, no se interrumpe". El asunto no cambia si el tubo se ensancha o se hace más angosto. Aunque el caño cambie su sección, siempre se cumple que todo lo que entra tiene salir.



Lo mismo pasa si el tubo está inclinado o si está vertical. Esté como esté, todo lo que entra siempre es igual a lo que sale

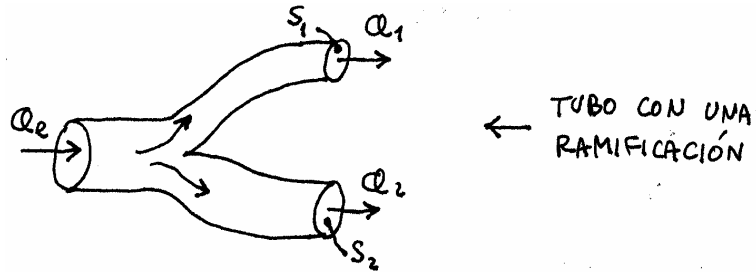


LA ECUACION DE CONTINUIDAD TAMBIEN SIRVE SI EL TUBO ES VERTICAL O ESTÁ INCLINADO

Resumiendo, la ecuación de $V_e \times S_e = V_s \times S_s$ se puede usar **SIEMPRE**. El tubo puede estar derecho o inclinado. Puede tener ensanchamientos o no. Incluso puede ser vertical. La ecuación de continuidad siempre es válida, sea el tubo que sea, sea el líquido que sea.

TUBOS CON RAMIFICACIÓN

A veces te pueden dar un tubo que se divide en dos. Esto es lo que pasa en las venas y en las arterias. Sería este caso :



Acá también todo el caudal que entra tiene que ser el caudal que sale. O sea,

$$Q_e = Q_1 + Q_2 \Rightarrow$$

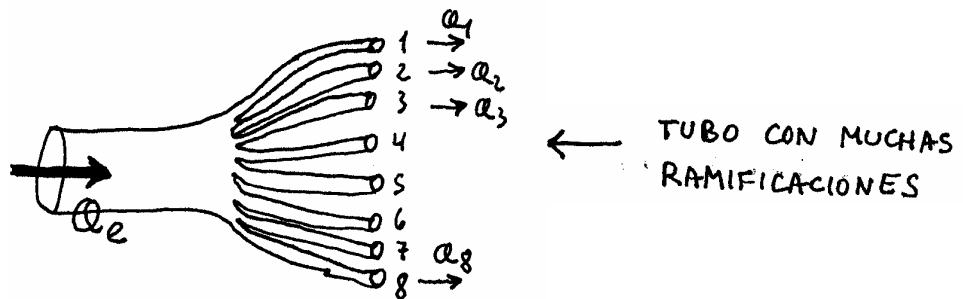
$$N_e S_e = N_1 S_1 + N_2 S_2 \quad \leftarrow \text{ECUACIÓN DE CONTINUIDAD P/ TUBO CON RAMIFICACIÓN}$$

Pregunta 1 : ¿ La suma de las 2 secciones de salida es igual a la sección de entrada ?

Pregunta 2 : ¿ Puede ser que las velocidades de salida sean iguales ? (Penselo)

TUBOS CON MUCHAS RAMIFICACIONES

A veces te pueden dar un tubo que se divide en muchos tubitos chiquitos. Esto es lo que pasa en los vasos capilares. Viene un vaso grande que se divide en muchos vasos chiquitos, Sería este caso:



Si el tubo principal se divide en 8, entonces el caudal que entra tiene que ser igual a la suma de los 8 caudales que salen. Entonces el planteo sería:

$$Q_e = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_8 \Rightarrow$$

O sea:

$$N_e S_e = N_1 S_1 + N_2 S_2 + \dots + N_8 S_8 \quad \leftarrow \text{ECUACIÓN QUE SE PLANTEA P/ UN TUBO CON MUCHAS RAMIFICACIONES}$$

Otra: ¿ Las velocidades de salida serán todas iguales en cada tubito ?

¿ La suma de todas las secciones de la salida será igual a la sección de entrada ?

ECUACION DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli es la fórmula más importante de toda esta parte de hidrodinámica. Es la que más se usa y es la que trae más problemas. La fórmula completa para el caso general es:

$$P_e + \frac{1}{2} \delta v_e^2 + \delta g h_e = P_s + \frac{1}{2} \delta v_s^2 + \delta g h_s \quad \leftarrow \text{ECUACION DE BERNOULLI}$$

Esta fórmula es la ecuación de la conservación de la energía para el líquido que va dentro del tubo. Al plantear este choque, lo que uno plantea es la conservación de la energía.

Conclusión: Bernoulli no se puede plantear si el líquido tiene viscosidad. La viscosidad es el rozamiento de los líquidos. Si hay rozamiento, la energía no se conserva.

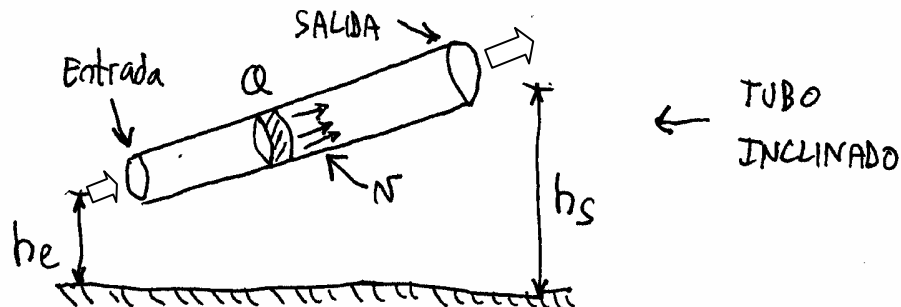
El significado de cada término de la ecuación es :

P_{ent} = Presión a la entrada. Va en Pascales = Newton/m²
 P_{sal} = Presión en la salida. Va en Pascales = Newton/m²
Delta: (δ) Es la densidad del líquido. Va en Kg/m³
 v_{ent} = Velocidad del líquido en la entrada. Va en m/s
 v_{sal} = Velocidad del líquido en la salida. Va en m/s
 g : Aceleración de la gravedad (= +10 m/s²)
 h_{ent} = Altura del líquido en la entrada. Va en m.
 h_{sal} = Altura del líquido en la salida. Va en m.

⇨ **VER**

SIGNIFICADO DE CADA TERMINO EN LA ECUACION DE BERNOULLI

3 - Esta ecuación así como está se puede usar siempre que el líquido no tenga viscosidad. Sirve si el tubo es vertical, horizontal o si está inclinado. Una situación complicada que puede aparecer es tubo inclinado. Sería este caso:



A su vez los tubos verticales o inclinados pueden cambiar de sección en el medio. O sea pueden cambiar de diámetro y hacerse más angostos o más anchos.

ECUACION DE BERNOULLI PARA TUBOS HORIZONTALES

Si el tubo está horizontal la ecuación se reduce un poco. Desaparecen los términos de la ecuación que tenían h . Esto pasa porque al ser el tubo horizontal, la altura en la entrada es igual a la altura en la salida. Entonces, para tubos horizontales la ecuación queda así :

$$P_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 = P_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2$$

← ECUACION DE BERNOULLI PARA TUBOS HORIZONTALES

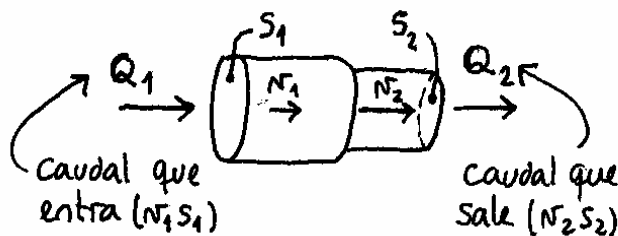
Se pueden poner las presiones del mismo lado de la ecuación. En ese caso la fórmula de Bernoulli queda :

$$P_e - P_s = \frac{1}{2} \rho (v_s^2 - v_e^2)$$

De las ecuaciones de continuidad y Bernoulli sacamos varias ideas importantes. Fijate :

CONCEPTO UNO: A MAYOR SECCIÓN, MENOR VELOCIDAD

De la ecuación de continuidad hago una deducción importante: si el valor $V \times S$ siempre se tiene que mantener constante, entonces donde el tubo sea más angosto LA VELOCIDAD SERÁ MAYOR. (Atento).



← DONDE EL TUBO ES MAS ANGOSTO, LA VELOCIDAD ES MAS GRANDE ($v_2 > v_1$)

Esto pasa porque el caudal que circula es constante. Entonces si el tubo se hace más angosto, para que pueda circular el mismo caudal, la velocidad de líquido tiene que aumentar. Exactamente lo contrario pasa si el caño se hace mas ancho. La velocidad del líquido tiene que disminuir para que pueda seguir pasando el mismo caudal.

CONCEPTO DOS: A MAYOR VELOCIDAD, MENOR PRESIÓN

Algo importante que se puede deducir de la ecuación de Bernoulli es que en el lugar donde la velocidad del líquido que circula sea mayor, la presión será menor. Aclaración importante: Esto pasa solo si el tubo es horizontal. (Ojo).

Es decir que si la velocidad a la salida aumenta, la presión en la salida va a disminuir.

Este concepto de que "a mayor velocidad, menor presión" es bastante anti-intuitivo. Lo que termina pasando es al revés de lo que uno diría que tiene que pasar. Lo razonable sería

decir que "a mayor velocidad, mayor presión". Pero no es así. Lo que ocurre en la realidad es lo contrario. Es decir, repito, a mayor velocidad, menor presión.

CONCLUSIÓN:

RECORDAR → **MAYOR VELOCIDAD → MENOR PRESIÓN**

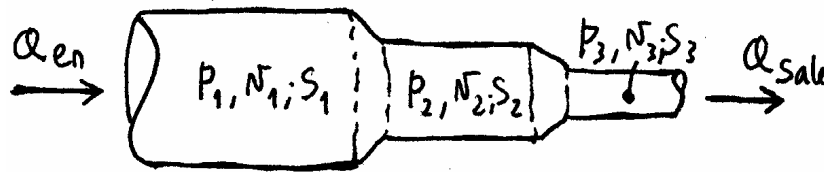


CONCEPTO TRES: A MAYOR SECCION, MAYOR PRESION

Por un lado, a menor sección, mayor velocidad. (Continuidad). Por otro lado a mayor velocidad, menor presión. (Bernoulli en tubos horizontales). Uniendo estas 2 ideas en una sola, puedo decir que a menor sección, menor presión. O lo que es lo mismo, a mayor sección, mayor presión.

Esta conclusión significa que donde mayor sea el diámetro del tubo, mayor va a ser la presión en el líquido que circula. (Esto vale sólo para tubos horizontales). Esta conclusión también es bastante anti-intuitiva.

Resumiendo, las 3 frases célebres de la hidrodinámica son:



Mayor sección, menor velocidad \Rightarrow $V_1 < V_2 < V_3$

Mayor velocidad, menor presión \Rightarrow $P_3 < P_2 < P_1$

Mayor sección, mayor presión $\Rightarrow S_1 > S_2 > S_3 \Rightarrow P_1 > P_2 > P_3$

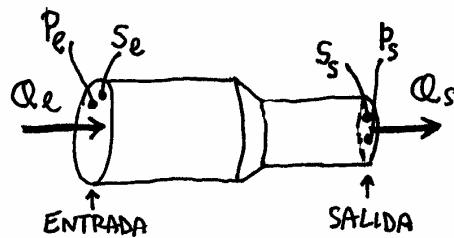
DIFERENCIA DE PRESIÓN:

A veces en los problemas piden calcular la DIFERENCIA DE PRESIÓN. Diferencia significa resta. Esto quiere decir que te están pidiendo que hagas la cuenta $P_1 - P_2$
Entonces:

$\Delta P = P_1 - P_2$ ← DIFERENCIA DE PRESIÓN

ECUACIÓN DE BERNOULLI REDUCIDA

Para un tubo horizontal se cumplen las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli:



Despejando la velocidad de salida V_s de la ecuación de continuidad

$$\text{Por continuidad } N_e S_e = N_s \cdot S_s \Rightarrow N_s = \frac{N_e S_e}{S_s}$$

Reemplazando V_s en la ec de Bernoulli $P_e - P_s = \frac{1}{2} \rho_{Liq} (N_s^2 - N_e^2)$

$$P_e - P_s = \frac{1}{2} \rho_{Liq} \left(N_e^2 \frac{S_e^2}{S_s^2} - N_e^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_e - P_s = \frac{1}{2} \rho_{Liq} N_e^2 \left(\frac{S_e^2}{S_s^2} - 1 \right)} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{EC. DE BERNOULLI} \\ \text{P/TUBOS HORIZONTALES} \\ \text{EN FUNC. DE LAS SECCIONES} \end{array}$$

Esta ecuación es importante en algunos casos porque ahorra cuentas. Generalmente no te dan como dato las velocidades a la entrada y a la salida del tubo. Casi siempre suelen darte las secciones. Entonces uno tiene que calcular $V_{ENTRADA}$ y V_{SALIDA} por continuidad. No es terrible, pero hay que hacer la cuenta y uno se puede equivocar. La ecuación reducida YA TIENE todo puesto en función de las secciones, así que hay que hacer menos cálculos.

Por otro lado, otra ventaja de esta ecuación es esta: Mirá el término S_e^2 / S_s^2 . Uno puede poner la sección en la fórmula en cualquier unidad porque se simplifican. O sea, si te dan la sección del tubo en cm^2 , la ponés en cm^2 . si te la dan en mm^2 , la ponés en mm^2 . Es lo mismo. No hay que andar cambiando de mm^2 a metro^2 ni nada por el estilo.

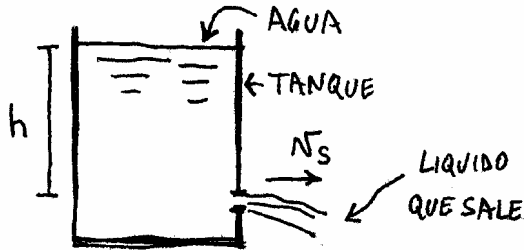
Esto de poder poner la sección en cualquier unidad también ahorra tiempo.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI (IMPORTANTE)

Hay algunas situaciones que suelen tomar en los parciales. Pueden ser preguntas teóricas o pueden ser problemas en donde haya que aplicar Bernoulli. Fijate:

1 - TEOREMA DE TORRICELLI

Imaginate un tanque con agua. Le hacés un agujero a una profundidad h por debajo de la superficie. El agua va a empezar a salir con cierta velocidad.



El teorema de Torricelli te da la manera de calcular la velocidad con la que sale el agua por el agujero. La fórmula de Torricelli es :

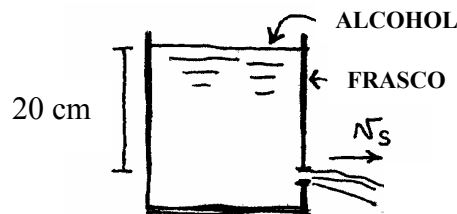
$$V_s = \sqrt{2gh}$$

← TEOREMA DE TORRICELLI

En esta fórmula g es la aceleración de la gravedad. V_s es la velocidad con la que sale el agua en m/s. h es la profundidad del agujero. Va en metros y se mide desde la superficie del agua. Atención: El agujero puede estar en las paredes o en el fondo del tanque.

Ejemplo:

UN FRASQUITO CONTIENE ALCOHOL DE DENSIDAD $0,8 \text{ g/cm}^3$. SE LE HACE UN AGUJERITO DE 1 mm DE RADIO EN EL COSTADO A UNA DISTANCIA DE 20 cm POR DEBAJO DE LAS SUPERFICIE DEL LIQUIDO. CALCULAR CON QUÉ VELOCIDAD SALE EL ALCOHOL POR EL AGUJERITO.



Solución: Aplico el teorema de Torricelli. La velocidad de salida es raíz de $2gh$. Entonces:

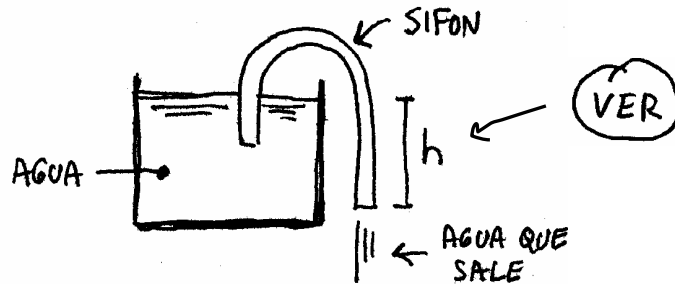
$$V_s = \sqrt{2gh} \Rightarrow V_s = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ m}}$$

$$\rightarrow \boxed{V_s = 2 \text{ m/s}} \leftarrow \text{VELOCIDAD DE SALIDA}$$

NOTA: La velocidad con la que sale el agua no depende de la densidad del líquido ni del tamaño del agujerito. Por ejemplo, V_s es la misma si pongo agua o si pongo mercurio.

2 - SIFON

Para la física, un sifón es un cañito que se usa para pasar líquidos de un lado a otro .
Vendría a ser una cosa así:



Lo que uno puede calcular aplicando Bernoulli es la velocidad con que va a salir el agua.
Al igual que pasa en el teorema de Torricelli, acá también la velocidad de salida es raíz de 2 ge hache:

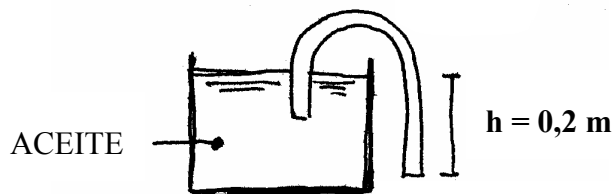
$$v_s = \sqrt{2gh}$$

← SIFON

Atención: Acá h es la distancia que va desde la parte de abajo del tubo hasta la superficie del agua. (Ver dibujo)

EJEMPLO:

CALCULAR CON QUE VELOCIDAD SALE ACEITE DE DENSIDAD $0,8 \text{ g/cm}^3$ POR UN SIFON DE RADIO 1 cm .



Solución: Aplico la fórmula para el sifón. La velocidad de salida es raíz de 2 ge hache.
Entonces:

$$v_s = \sqrt{2gh}$$

$$v_s = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ m}}$$



$$v_s = 2 \text{ m/s}$$

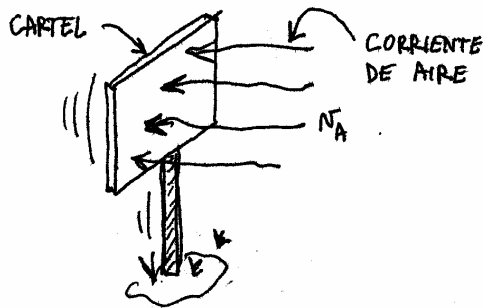


VELOCIDAD DE SALIDA

NOTA: Fijate que la velocidad de salida no depende de la densidad del líquido. (Ojo).
Tampoco depende del diámetro del tubo, forma del tubo o cosas por el estilo.

3- VIENTO SOBRE UN CARTEL

Imaginate que tenés un cartel o alguna superficie plana en donde pega el viento.



El viento ejerce una fuerza al pegar sobre el cartel. Esa fuerza se puede calcular por Bernoulli. La fórmula es :

$$F = \frac{1}{2} \delta_{\text{AIRE}} N_A^2 \cdot \text{Sup}_{\text{cartel}}$$

← FUERZA QUE EJERCE EL VIENTO SOBRE EL CARTEL

En esta ecuación δ_{AIRE} es la densidad del aire ($= 1,3 \text{ kg/m}^3$). V_A es la velocidad del aire en m/seg. Sup_c es la superficie del cartel en m^2 . Esta ecuación se deduce planteando el teorema de Bernoulli para la corriente de aire que pega en el cartel.

EJEMPLO

CALCULAR QUE FUERZA EJERCE UN VIENTO DE 36 Km/h SOBRE UN CARTEL DE 1 m^2 DE SUPERFICIE

Solución: La fuerza del aire sobre el cartel es: $F = \frac{1}{2} \delta_{\text{AIRE}} N_A^2 \cdot \text{Sup}_{\text{cartel}}$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \delta_{\text{AIRE}} \cdot (V_{\text{Aire}})^2 \times \text{Sup}$$

$$F = 0,5 \times 1,3 \text{ kg/m}^3 \times (10 \text{ m/seg})^2 \times 1 \text{ m}^2$$

$$F = 65 \text{ N} = 6,5 \text{ Kgf}$$

← FUERZA QUE EJERCE EL VIENTO SOBRE EL CARTEL

4 - ARTERIA O VENA CON UNA OBSTRUCCION (VER)

Parece que en la medicina es bastante común que las arterias o las venas se taponen con cosas tipo colesterol y demás. Concretamente la situación es esta:



Si se le pregunta a una persona que cree que va a ocurrir con la arteria cuando se obstruye, la respuesta más común es esta: Y bueno, al chocar con la obstrucción, la sangre se va a frenar y va a empezar a presionar hacia fuera porque quiere pasar. Por lo tanto la arteria se va a dilatar y se va a formar como un globo.

Este razonamiento es muy lindo y muy intuitivo pero está **MAL**. Lo que pasa es **justo al revés**. Fijate. El caudal que manda el corazón es constante. Este caudal no se frena por ningún motivo.

Para poder pasar por la obstrucción lo que hace la sangre es aumentar su velocidad. (La velocidad aumenta porque el diámetro de la arteria disminuye). Entonces, ... ¿ qué es lo que pasa en la realidad ?

Y bueno, razonemos con la frase salvadora de la hidrodinámica. Esta frase es:

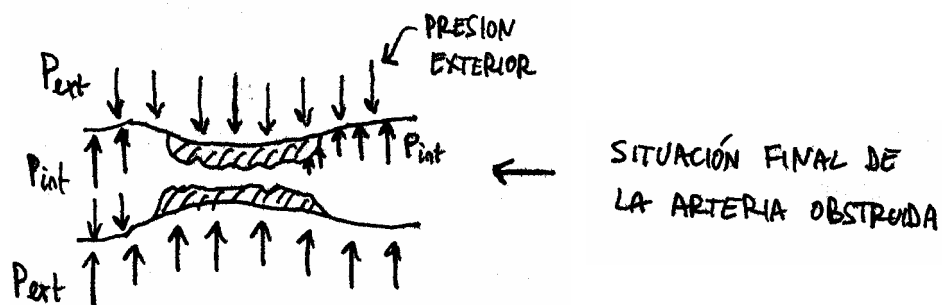
MAYOR VELOCIDAD,
MENOR PRESION

Conclusión: al aumentar la velocidad dentro de la arteria, la presión adentro tiene que disminuir. Pero afuera de la arteria la presión sigue siendo la misma. Entonces la presión de afuera le gana a la presión de adentro y la arteria se comprime.

¿ Y qué pasa al comprimirse la arteria ?

Rta: La obstrucción se cierra más. Esto provoca un aumento de la velocidad dentro de la obstrucción, lo que a su vez obliga a la arteria a cerrarse más todavía.

De esta manera, la arteria se va cerrando más y más hasta que sobreviene el **COLAPSO**. Esto significa que la arteria tiende a cerrarse del todo e impide el pasaje de sangre.



Esto es lo que ocurre cuando una persona tiene un ataque cardíaco. Creo que también pasa en el cerebro y en otros lados. Me parece que a este asunto se lo llama trombosis o algo así.
