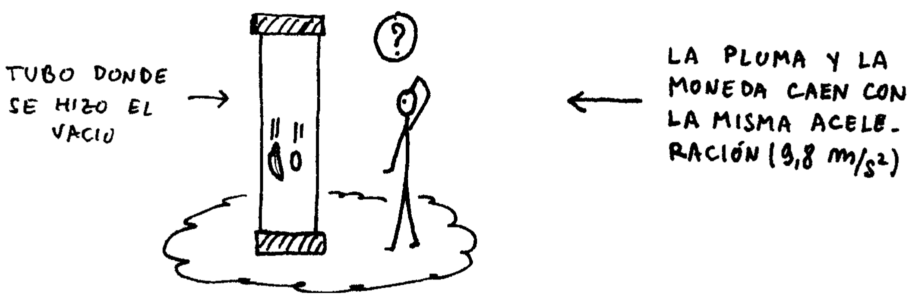
CLASE DE ANIBAL
PARA FOTOCOPIAR

CAÍDA LIBRE y TIRO VERTICAL

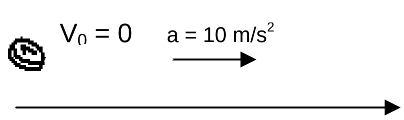
Suponé que un tipo va a la ventana y deja caer una cosa. Una moneda, por ejemplo.

Claro, el tipo tiene razón. Cuando uno deja caer una cosa, lo que cae, cae con MRUV. Toda cosa que uno suelte va a caer con una aceleración de 9,8 m/s^2. Puede ser una moneda, una pluma o un elefante. Si suponemos que no hay resistencia del aire, <u>todas las cosas caen con la misma aceleración</u>.

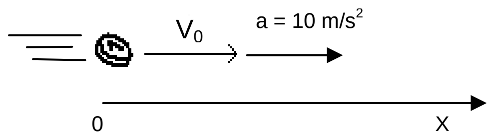
¿ Quién descubrió esto ? Obvio. Galileo . (IDOLO !).
Este hecho es medio raro pero es así. En la realidad real, una pluma cae más despacio que una moneda por la resistencia que opone el aire. Pero si vos sacás el aire, la pluma y la moneda <u>van a ir cayendo todo el tiempo juntas</u>. (Este es un experimento que se puede hacer).



Esta aceleración con la que caen las cosas hacia la Tierra se llama aceleración de la gravedad. Se la denomina con la letra **g** y siempre apunta hacia abajo.
En el caso de la moneda que cae yo puedo "acostar" al problema y lo que tendría sería un objeto que acelera con aceleración 10 m/s^2. Vendría a ser algo así :

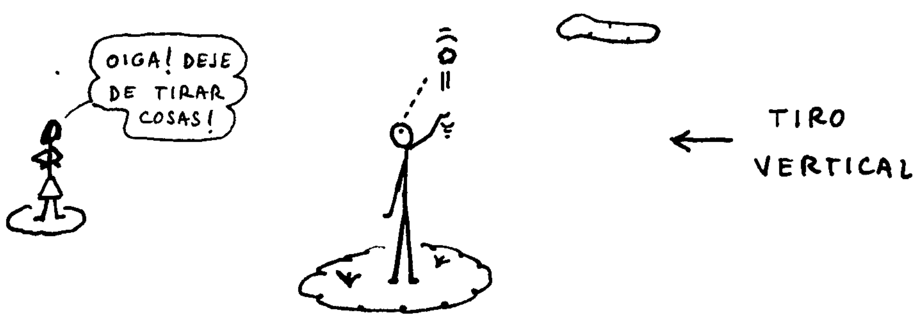


Y si lo hubiera tirado para abajo, tendría velocidad inicial, es decir, esto:

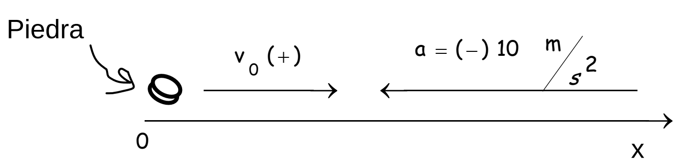


Es decir que un problema de caída libre no se diferencia para nada de un problema de MRUV. Es más, la caída libre **ES** un MRUV.
Para resolver los problemas de caída libre o tiro vertical puedo aplicar los mismos razonamientos y las mismas ecuaciones que en MRUV. Todo lo mismo. La única diferencia es que antes todo pasaba en un eje horizontal. Ahora todo pasa en un eje vertical. Lo demás es igual.

Vamos ahora a esto. Pregunta:
¿ Y qué pasa con el tiro vertical ?.
Rta: Y bueno, con el tiro vertical es la misma historia. Tiro vertical significa tirar una cosa para arriba.

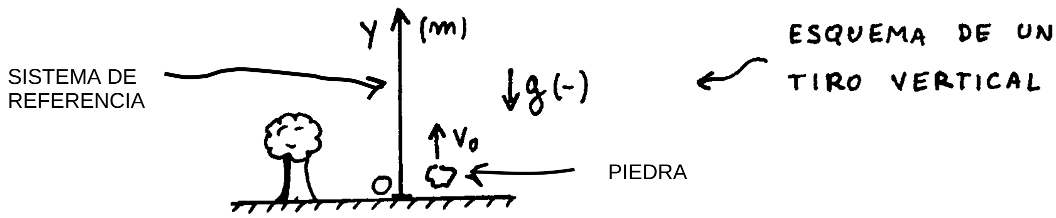


Si yo acuesto una situación de tiro vertical, lo que voy a obtener va a ser esto:



Es decir, tengo la situación de una cosa que sale con una determinada velocidad inicial y se va frenando debido a una aceleración negativa.
¿ Y esto qué es ?
Rta: Y bueno, es un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

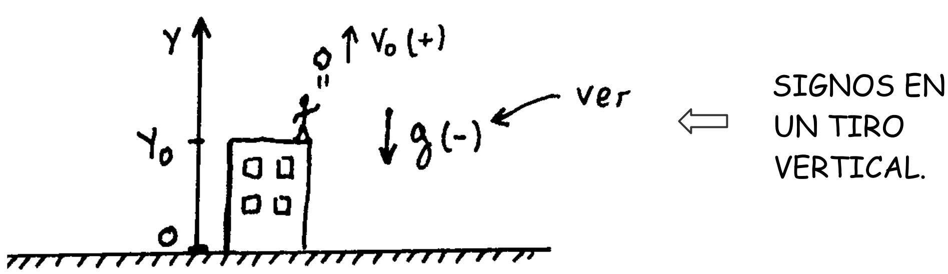
Si hiciera un esquema tomando un eje vertical **y**, tendría algo así:



Conclusión:
Tanto la caída libre como el tiro vertical son casos de movimiento rectilíneo uniformemente variado. Los problemas se piensan de la misma manera y se resuelven de la misma manera. Las ecuaciones son las mismas. Los gráficos son los mismos.
Caída libre y tiro vertical no son un tema nuevo, son sólo la aplicación del tema anterior.
El que sabe MRUV, sabe caída libre y tiro vertical. (Sólo que no sabe que lo sabe).

CÓMO RESOLVER PROBLEMAS DE CAÍDA LIBRE y TIRO VERTICAL

1 - Hago un esquema de lo que pasa. Sobre ese esquema tomo un eje vertical **y**. Este eje lo puedo poner apuntando para arriba o para abajo (como más me convenga) Puede ser algo así:



Sobre este esquema marco los sentidos de V_0 y de g. Si V_0 y g apuntan en el mismo sentido del eje **y**, serán (**+**) .Si alguna va al revés del eje **y** será (**-**) .(como en el dibujo). El eje horizontal x puedo ponerlo o no. No se usa en estos problemas pero se puede poner.

2 - La aceleración del movimiento es dato. Es la aceleración de la gravedad (g). El valor verdadero de g en La Tierra es 9,8 m/s^2. Pero generalmente para los problemas se la toma como 10 m/s^2.

Para caída libre y tiro vertical tengo siempre 2 ecuaciones: La de posición y la de velocidad. Estas 2 ecuaciones son las que tengo que escribir.También puedo poner la ecuación complementaria que me puede llegar a servir si el tiempo no es dato.

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + g \cdot t \\ a = cte = g \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Ecuaciones Horarias}$$

$$v_f^{\,2} - v_0^{\,2} = 2 \cdot g \cdot (y_f - y_0) \qquad \leftarrow \text{Ec.Complementaria}$$

Si, por ejemplo en el dibujo V_0 fuera 10 m/s, la aceleración de la gravedad fuera 10 m/s^2 y la altura del edificio fuera de 20 m, las ecuaciones horarias quedarían:

$$\begin{cases} Y = 20\,m + 10\,\dfrac{m}{s} \cdot t + \dfrac{1}{2}\left(-10\,\dfrac{m}{s^2}\right) \cdot t^{\,2} \\ V_f = 10\,\dfrac{m}{s} + \left(-10\,\dfrac{m}{s^2}\right) \cdot t \\ a = -\,10\,\dfrac{m}{s^2} = cte \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Reemplacé por los Datos}$$

3 - Usando las primeras 2 ecuaciones horarias despejo lo que me piden.

En los problemas de caída libre y T vertical suelen pedirte siempre las mismas cosas. Puede ser la altura máxima (h_{max}). Puede ser el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. (t_{max}). Puede ser la velocidad inicial con la que fue lanzado. Puede ser el tiempo que tarda en caer ($t_{caída}$). Siempre son cosas por el estilo.

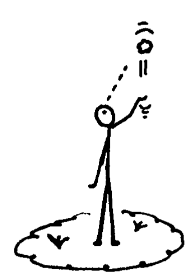
<u>EJEMPLO 1</u> : (Tiro vertical)

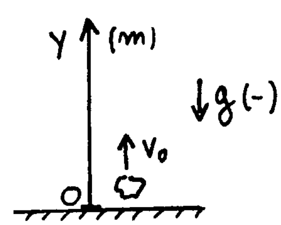
Un señor tira una piedra para arriba con una velocidad inicial de 40 m / s . Calcular :

a) – Qué tiempo tarda en llegar a la altura máxima.
b) – Cuál es la altura máxima.
c) - Trazar los gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Bueno, lo primero que hago es un dibujito de lo que plantea el problema. Elijo mi sistema de referencia. En este caso lo voy a tomar positivo para arriba. ⇨ g = (-) .

DIBUJO ⇨





⇦ SISTEMA DE REFERENCIA

Las ecuaciones horarias para un tiro vertical son :

$$Y = Y_0 + V_{0y}\, t + \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$V_{fy} = V_{0y} + g\, t$$

Reemplazo por los datos. Fijate que tomé el sistema de referencia para arriba. Quiere decir que g es negativa. La voy a tomar como 10 m / s². Pongo el sistema de referencia exactamente en la mano del tipo. Me queda: ⟹

$$Y = 0 + 40\ m/s\ t + \tfrac{1}{2}\,(-10\ m/s^2)\cdot t^2$$

$$V_f = 40\ m/s + (-10\ m/s^2)\,.\,t$$

Fijate que cuando el cuerpo llega a la altura máxima su velocidad es cero. Entonces reemplazo V_f por cero en la ecuación de la velocidad. Me queda:

$$\underbrace{0}_{V_f\,=\,0} = 40\ m/s + (-10\ m/s^2)\,.\,t_{max}$$

Despejo t max :

$$t_{max} = \frac{-40\ m/s}{-10\ m/s^2}$$

$$\boxed{t_{max} = 4\ seg}$$ ⟸ Tiempo que tarda en llegar a la altura máxima

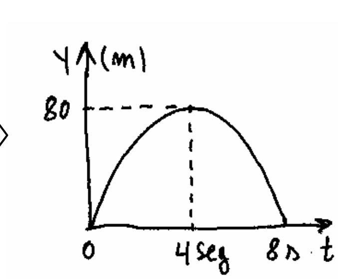
Reemplazando t_{max} = 4 segundos en la ecuación de la posición, calculo la altura máxima:

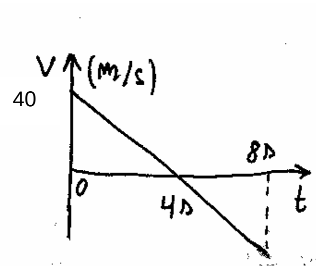
$$Y_{max} = 40\ m/s\ .\ 4\ s + \tfrac{1}{2}\,(-10\ m/s^2)\,.\,(4\ s)^2$$

$$\boxed{Y_{max} = 80\ m}$$ ⟸ Altura máxima

Para construir los gráficos puedo dar valores o puedo hacerlos en forma cualitativa. Grafico cualitativo quiere decir indicar la forma que tiene sin dar todos los valores exactos. Podés hacerlos como quieras. En este caso quedan así:

Posición en función del tiempo ⟹





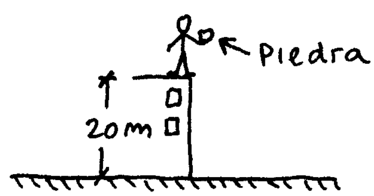
⟸ Velocidad en función del tiempo

Fijate esto: El tiempo que la piedra tardó en llegar a la altura máxima dio 4 segundos. El tiempo que la piedra tarda en tocar el suelo da 8 segundos. (El doble).
¿ Es eso una casualidad ?
¿ Tendrías manera de comprobar que el tiempo que tarda la piedra en caer tiene que ser sí o sí 8 segundos ?
(Pensarlo)

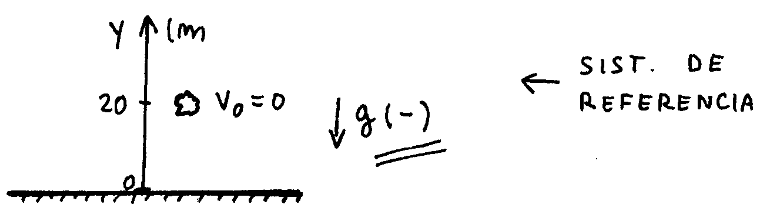
<u>Ejemplo 2</u> **(CAIDA LIBRE Y TIRO VERTICAL)**

Un tipo está parado a 20 m de altura. Calcular qué tiempo tarda y con qué velocidad toca el suelo una piedra si el tipo:
a)- La deja caer.
b)- La tira para abajo con V_0 = 10 m/s.
c)- La tira para arriba con V_0 = 10 m/s.

Hago un esquema de lo que pasa. Tengo el tipo arriba de la terraza que tira la piedra:



Voy al caso **a)** donde el tipo deja caer la piedra. Elijo mi sistema de referencia y marco v_0 y g con su signo. En este caso V_o vale cero porque la piedra se deja caer.



Reemplazo por los valores. Voy a calcular todo con g = 10 m/s^2 . Las ecuaciones del movimiento quedan así :

$$\begin{cases} Y = 20\,m + \frac{1}{2}\left(-10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\cdot t^2 \\ V_f = 0 + \left(-10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\cdot t \\ a = -\,10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = cte \end{cases} \quad \leftarrow \text{Ecuaciones horarias}$$

El tiempo que la piedra tarda en caer lo despejo de la 1ª ecuación. Cuando la piedra toca el suelo su posición es y = 0. Entonces en la primera ecuación reemplazo **y** por cero. Me queda :

$$0 = 20\,\mathrm{m} - \tfrac{1}{2} 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2$$

$$\Rightarrow \quad 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2 = 20\,\mathrm{m} \;\Rightarrow\; t^2 = \frac{20\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 2\,\mathrm{seg}} \leftarrow \text{Tiempo que tarda}$$

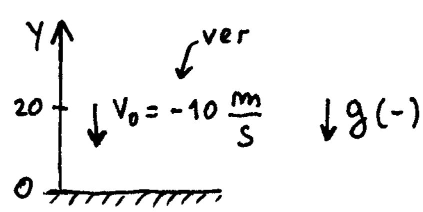
Reemplazando este tiempo en la segunda ecuación tengo la velocidad con que toca el piso :

$$V_f = -10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,\mathrm{seg}$$

$$\boxed{V_f = -\,20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \quad \leftarrow \quad \text{Velocidad de la piedra al tocar el suelo.}$$

El signo negativo de V_f me indica que la velocidad va en sentido contrario al eje **y.** Siempre conviene aclarar esto.

b) - La tira para abajo con V_0 = 10 m/s.
Tomo el mismo sistema de referencia que tomé antes. Eje Y positivo vertical hacia arriba. Ahora la velocidad inicial es (-) porque va al revés del eje Y. (Atento).



Igual que antes, cuando la piedra toca el suelo, y = 0. Entonces:

$$(y = 0) \;\Rightarrow\; \quad 0 = 20\,\mathrm{m} - 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}_{a} \cdot t^2 + \underbrace{10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}_{b} \cdot t \underbrace{- 20\,\mathrm{m}}_{c} = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática. Fijate que te marqué los valores de a, b y c. Entonces reemplazo los valores de a, b y c en la fórmula de la ecuación cuadrática.

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10\frac{m}{s}\right)^2 - 4\,.\,5\ \frac{m}{s^2}\,.\left(-20\,m\right)}}{2\,.\,5\ \frac{m}{s^2}}$$

Haciendo las cuentas :

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm 22{,}36\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{t_1 = -3{,}236\,seg} \quad ; \quad \boxed{t_2 = 1{,}236\,seg} \quad \leftarrow \text{ Tiempo de caida.}$$

Taché la 1ª solución porque tiempos negativos no tienen sentido físico. Ahora voy a reemplazar este tiempo de 1,236 segundos en la otra ecuación que es $V_f = V_o + g\ t$ y calculo la velocidad final. (= al tocar el piso). Me queda :

$$V_f = -10\ m/s - 10\ m/s^2\ .\ 1{,}236\ seg$$

$$\boxed{V_f = -22{,}36\ m\ /\ s} \quad \Longleftarrow \quad \text{VELOCIDAD FINAL}$$

c) - Cuando el tipo la tira para arriba con V_0 = 10 m/s. El signo de V_o cambia. Ahora V_0 es positiva. Pero... Ojaldre !. El signo de g <u>**NO**</u> cambia ! El vector aceleración de la gravedad sigue apuntando para abajo (como siempre). Entonces al ir al revés del eje **Y** su signo es <u>negativo</u>. Las ecuaciones horarias quedan:

$$Y = 20\ m + 10\ m/s\ t - \tfrac{1}{2}\ 10\ m/\ s^2\ t^2$$

$$V_f = 10\ m/s - 10\ m/s\ t$$

Haciendo lo mismo que en el caso anterior me queda

$$(\,y = 0\,) \Rightarrow \quad 0 = 20\,m + 10\frac{m}{s} \cdot t - 5\frac{m}{s^2}t^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{5\frac{m}{s^2}}_{a} \cdot t^2 \underbrace{-10\frac{m}{s}}_{b} \cdot t \underbrace{-20\,m}_{c} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{10\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2 - 4.5\,\frac{m}{s^2}.\left(-20\,m\right)}}{2.5\,\frac{m}{s^2}}$$

$\Rightarrow$ <u>t_{caida} = 3,236 seg</u>

Igual que antes, anulé la solución negativa porque no tiene significado físico. Para calcular la velocidad con que la piedra toca el piso hago:

$$V_f = 10\ m/s - 10\ m/s \times 3,236\ s$$

$$\rightarrow \; V_f = -\ 22,36\ m/s$$

Ahora fijate esto: en los casos b) y c) el tiempo de caída no dio lo mismo. Eso es lógico. En un caso estoy tirando la piedra para arriba y en el otro para abajo. Cuando la tiro para arriba tiene que tardar mas. Pero en los casos b) y c) la velocidad de la piedra al tocar el piso... ¡ dio lo mismo ! (surprise)
Hummmmm....
¿ Estará bien eso ?
Esto me estaría diciendo que al tirar una piedra con una velocidad inicial "ve cero" para arriba o para abajo, la piedra toca el piso con la misma velocidad. (Raro).
¿ Podrá ser eso ?...
<u>Rta</u>: <u>Sí</u>.
No es que "puede ser que sea así". **Tiene** que ser así. (Pensalo).

Fin Teoría de Caída Libre y Tiro Vertical.