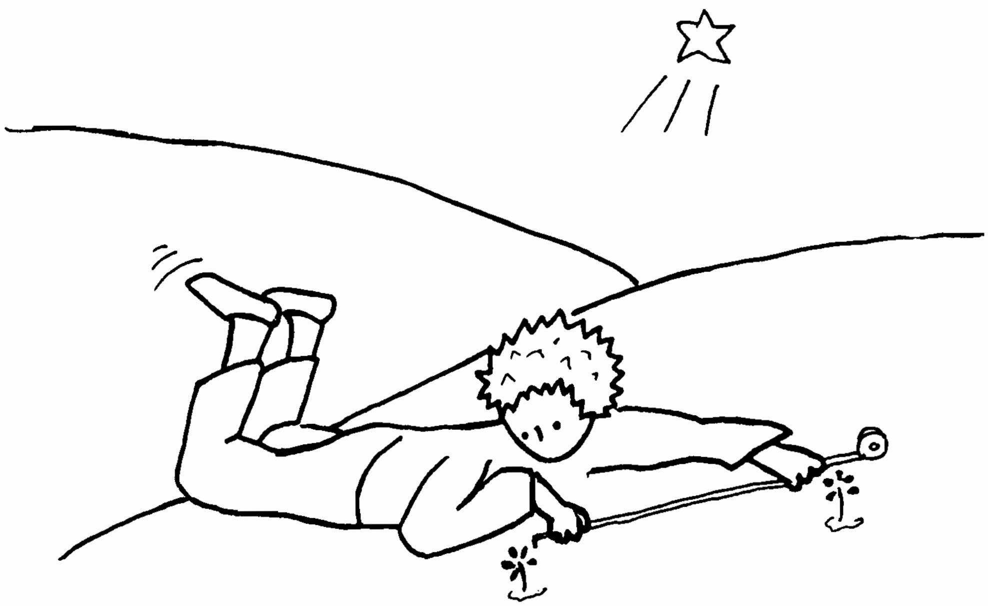
46M
ER_M

ASIMOV

ERRORES

EN LAS MEDICIONES

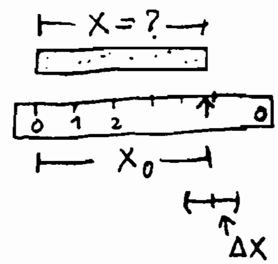


... Y TENDIDO SOBRE LA HIERBA, MIDIÓ.

TEORÍA Y PROBLEMAS RESUELTOS

ER_M

ERRORES EN LAS MEDICIONES - RESUMEN



No hay manera de saber cuánto mide una cosa exactamente. Si quiero conocer la longitud X de una barra tengo que expresar el resultado de la forma:

$$\boxed{X = X_0 \pm \Delta X}$$ ← RESULTADO DE UNA MEDICIÓN

X_0 es lo que marca la regla. Ese X_0 está afectado de una incerteza o error absoluto ΔX.

ERROR RELATIVO

Se define el error relativo de la medición como:

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{\Delta X}{X_0}}$$ ← ERROR RELATIVO

Se define el error porcentual $(\varepsilon(x)\,\%)$ como $\varepsilon(x) \times 100$.

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Cuando una magnitud x depende de los valores de otras magnitudes a, b, c.. etc, el error de medición se propaga a estas de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b \\ &\varepsilon\left(a.b \text{ ó } \frac{a}{b}\right) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) \\ &\varepsilon\left(a^{m \left(\text{ó } \frac{1}{m}\right)}\right) = m\left(\text{ó } \frac{1}{m}\right).\varepsilon(a) \end{aligned}}$$

← FÓRMULAS PARA LA PROPAGACIÓN DE ERRORES (RECORDAR)

En la última expresión recordar que $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$. (Exponente fraccionario).

FIN RESUMEN

INTRODUCCIÓN

Un soldado está haciendo vigilancia en un mangrullo. De pronto ve que vienen los indios y grita:

- Mi capitan, viene el malón!
- ¿Son muchos, soldado?
- Y, son como veinte mil uno.
- ¿Veinte mil **uno**?
- Si, porque viene 1 adelante y como 20.000 atrás.

(Reite de mis chistes).

Nosotros usamos la cifra "20.000" para exagerar una gran cantidad Algo. (Tiene 20.000 amigos, son como 20.000 problemas, etc).

De manera que decir 20.000 "tal cosa" es dar a entender que es mucho pero sin saber exactamente cuanto.

En este sentido está usado el término en el chiste.

Lo que causa gracia es que si el tipo no sabe con seguridad cuantos son "los 20.000", no tiene sentido aclarar que aparte de esos hay **uno** más.

Dicho en forma física, en una medición que da alrededor de veinte mil, un 1 se puede despreciar.

Este es el concepto de error que tenés que entender.

Y te digo más, si entendiste el chiste, es que ya tenías en tu cabeza una idea del concepto de error.

Bueno, si el concepto lo tenés, hilemos ahora un poco más fino...

ERRORES EN LAS MEDICIONES

Para entender el tema de errores hay sólo una cosa que tenés que saber bien. Esa cosa es la siguiente:

NO HAY MANERA DE SABER CUÁNTO MIDE ALGO CON TOTAL EXACTITUD

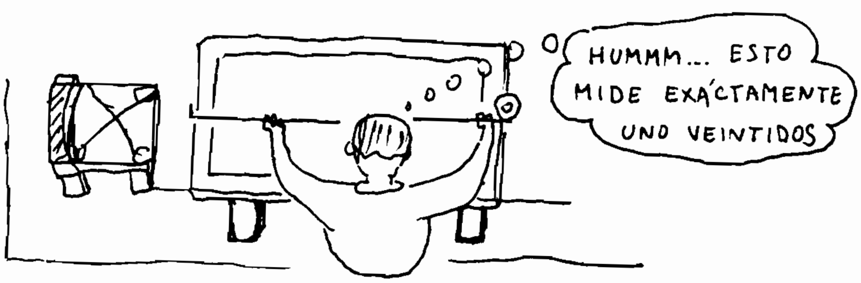
VER ESTO

Es decir, siempre que se mide una cosa se comete un cierto error que es IMPOSIBLE de evitar. Cuando digo imposible, quiero decir exáctamente eso: IM-PO-SI-BLE.

Se puede disminuir el error de la medición. Se lo puede hacer muy chico. Tan chico que sea prácticamente despreciable.

¡PERO NO SE LO PUEDE ELIMINAR DEL TODO! (atento).

La gente dice: ¡Pero como!?. ¡Qué error ni error! ¡Lo que yo mido es lo que yo mido!



¡Si a mi me dá que mide 1,22, mide 1,22 y listo!.

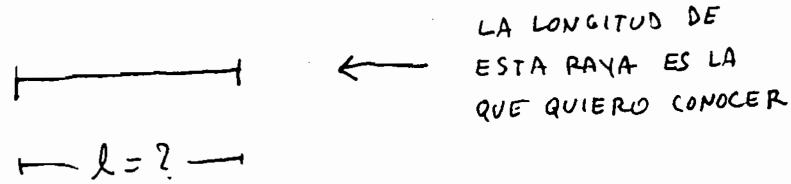
¡De qué error me estás hablando!?. ¡Yo no cometí ningún error!

Claro, la cosa es así:

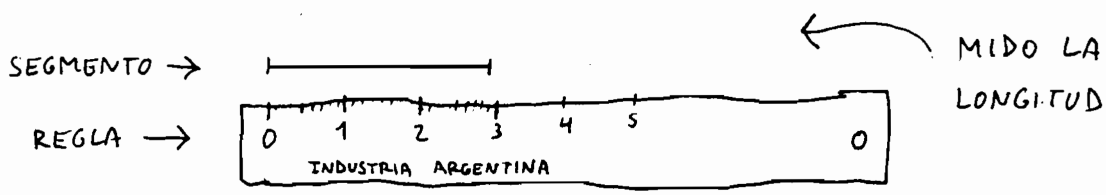
Nadie dice que vos al medir "te hayas equivocado". No es eso lo que ellos quieren decir cuando hablan de error de medición.

Lo que ellos quieren decir es que siempre que uno mide algo aparece una "cierta indeterminación" que es imposible de evitar.

Vamos a hacer la prueba. Vamos a medir algo y te vas a dar cuenta. Supongamos que quiero saber cuanto mide este segmento:



¿Cómo se hace para medir esto?. Muy simple: Agarro una regla, hago coincidir el cero de la regla con una punta del segmento, miro del otro lado y me fijo cuanto mide. O sea:



A mi el resultado de esta medición me da 2,9 cm. Sé que no me equivoqué porque la medí 3 veces.

Entonces...

¿Por qué habría el segmento de $\boxed{\text{NO}}$ medir 2,9 cm?. <u>RTA</u>: Fijate:

1 - ERROR CONSTRUCTIVO

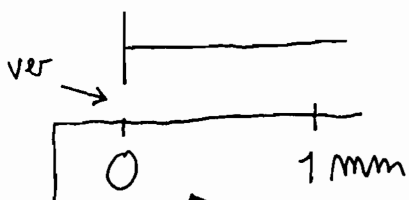
¿Cómo se yo que si la regla mide 20 cm, esos 20 cm son efectivamente 20 cm?. Tal vez los tipos la hicieron mal y donde dice 20 cm en realidad son 19,9 cm. Todos los instrumentos de medida tienen un error constructivo.

No te olvides que los franceses hicieron el metro patrón que guardan cerca de París. De ese metro los tipos hicieron varias copias, una de las cuales vino a parar acá. (La tienen en el instituto de pesas y medidas, ahí por donde está el gasómetro, en

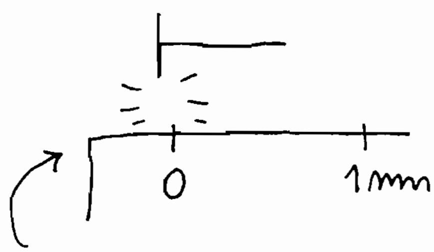
constituyentes y General Paz). A su vez de esa copia hicieron varias copias que están en varios lados del país. Los fabricantes de reglas de plástico usan una copia de esa copia para calibrar sus instrumentos.
Dicho de otra manera, una regla cualquiera de plástico puede medir fácil (fácil) una décima más o una décima menos de lo que marca.

② - ERROR DE COINCIDENCIA DEL CERO

Para poder hacer la medición tuve que hacer coincidir el cero de la regla con la punta del segmento...
¿Pero y si me equivoqué ahí?
Pudo haber pasado esto: (Amplío 25 veces)



ASÍ DEBERIA SER

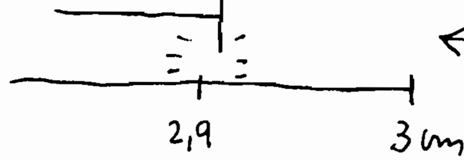


ESTO ES LO QUE PASÓ EN REALIDAD

En esta falta de coincidencia uno puede equivocarse en una décima más o menos.

③ - ERROR DE LECTURA EN EL 2,9

Al leer el Nº resultante de la medición pasa algo parecido a lo anterior. Uno cree ver 2,9 cuando en realidad es 2,91.



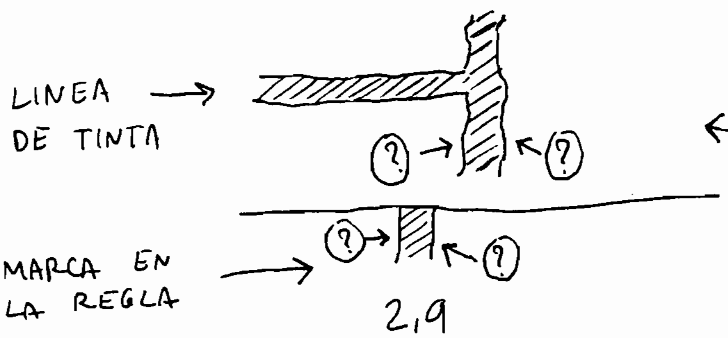
¿ℓ = 2,9 ó 2,91 cm?

En esto también tenemos una incerteza de 1 décima, apróximadamente.

Pero acá no termina la cosa. Hay mas fuentes de error.

(4)_ ERROR DEL GROSOR DE LOS TRAZOS.

Las marcas de la tinta en el papel tienen cierto espesor. Las marcas en la regla también.



¿HAY QUE CONSIDERAR QUE LA LONGITUD DEL SEGMENTO VA DE DÓNDE HASTA DONDE?

¿Y EN LA REGLA?

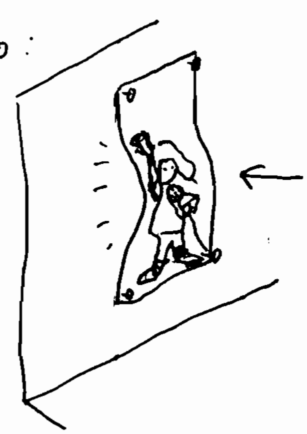
¿Te parece bien si sumamos 1 décima más a la incerteza que ya teníamos?

(5)_ ERROR POR CONDICIONES ATMOSFERICAS

Las cosas se agrandan con la temperatura. La regla se dilata y mide de más un dia de calor.

¿y el papel? ¿se dilatará? (vaya uno a saber).

La humedad también influye. El papel se estira con la humedad. Por eso a los posters que uno pega en la pared les pasa esto:



ACÁ SE ALEJA DE LA PARED PORQUE EL PAPEL SE ESTIRA.

(Entre paréntesis la solución a este problema es pegar posters únicamente los días que hay mucha humedad).

¿Y la presión atmosférica influye?. Y bueno, no sé, pero en algo debe influir.

Hay otras cosas que pueden causar errores en las mediciones, pero creo que el concepto ya lo entendiste, así que quedémosnos con estas **5**.

Cinco causas de error, a 1 décima c/u hacen 5 décimas, es decir, medio milímetro.

PEro...

¿Quién dice que todos los errores se suman en el mismo sentido? (Es decir, siempre de más o siempre de menos)

¿Tal vez los errores podrían cancelarse entre sí y el resultado sería $\boxed{\text{cero}}$...?!

¿Podría ser esto?

(Buena pregunta).

Bueno, como poder pasar, puede. Es decir, desde el punto de vista teórico podría ocurrir, pero... ¿Cómo sabrías que ocurrió?. Para ver si pasó habría que comparar el resultado de la medición con el <u>VERDADERO</u> <u>VALOR</u> de lo que quiero medir. Pero conocer el verdadero valor de lo que mide algo es imposible. Así que descartado.

¿Y si se cancelaran sólo algunos errores con otros entre sí y el resultado fuera que el error total es sólo de 2 décimas?

Bueno, esto es lo que pasa en la realidad real.

pero no se considera por la misma razón que antes: ¿cómo sé si justo en la medición que acabo de hacer me estoy equivocando en 1 décima, en 2 décimas o en 3 décimas? Sí, es probable que esté pasando eso, pero no puedo saberlo. ¡No tengo manera de darme cuenta!
(Creo que se entiende, ¿no?)
La solución a este problema la dieron los ingenieros. Consiste en lo que ellos llaman "ponerse del lado de la seguridad", concepto fundamental en cualquier cálculo de ingeniería.

El razonamiento es el siguiente:

> Yo no sé si el error es cero. La posibilidad existe, pero no lo sé.
> Tampoco sé si el error es de 2 o 3 décimas. Es muy probable que sea eso, pero no lo sé.
> Pero hay algo que sí se. Sé que si la medición estuvo bien hecha y las causas de error son sólo las 5 que consideré, el error nunca podrá ser mayor a 5 décimas.

LEER

Entonces poniéndonos del lado de la seguridad, digamos que el error cometido será como máximo de medio milímetro. (en más o en menos). La verdadera longitud ℓ del segmento es imposible de conocer, pero sí sabemos que:

$$\boxed{28{,}5 \text{ mm} < \ell < 29{,}5 \text{ mm}} \leftarrow \text{VALOR DE } \ell$$

Esta es la respuesta al problema real de medir una longitud.

ERROR ABSOLUTO DELTA EQUIS (ΔX)

Esta incerteza que tenemos al hacer una medición se llama error absoluto y se lo designa como ΔX. (si la magnitud es X, se lo llama ΔX. Si la magnitud es ℓ, se lo llama $\Delta \ell$, etc).

Este ΔX es el máximo error absoluto que uno puede cometer. El ΔX puede ser en más o en menos, eso uno no lo sabe. Por eso el resultado de la medición se pone así:

$$\boxed{X = X_0 \pm \Delta X}$$

EXPRESIÓN DEL RESULTADO DE UNA MEDICIÓN

VALOR DEL RESULTADO DE LA MEDICIÓN — VALOR MEDIDO — ERROR ABSOLUTO

Por ejemplo, para la medición del segmento que hice antes me dio $\ell_0 = 29$ mm y $\Delta \ell = 0{,}5$ mm. Entonces lo pongo:

$$\ell = (29{,}\underline{\underline{0}} \pm 0{,}5)\ \text{mm}$$

ver

El resultado de la medición tiene un valor máximo que es 29,5 mm y un valor mínimo que es 28,5 mm.
En base a estos valores máximos y mínimos puedo poner:

$$X_0 = \frac{X_{MAX} + X_{MIN}}{2}$$

y

$$\Delta X = \frac{X_{MAX} - X_{MIN}}{2}$$

EXPRESIÓN DEL VALOR MEDIDO X_0 Y DEL ERROR ABSOLUTO ΔX EN FUNCIÓN DE LOS VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS OBTENIDOS.

P/ la medición que hice sería $\ell_0 = \frac{29{,}5 + 28{,}5}{2}$ y $\Delta \ell = \frac{29{,}5 \ominus 28{,}5}{2}$

ACLARACIONES CON RESPECTO AL ERROR ABSOLUTO

- El error absoluto se puede achicar si uso mejores instrumentos de medición, pero no se lo puede hacer desaparecer del todo. Usando una regla tengo un error de ± medio milímetro. Podría usar un calibre y tendría un error de una décima. Podría usar un tornillo micrométrico y tendría un error de una centésima.
  Podría usar un laser y tendría un error de una millonésima. Así podría seguir. El error sería cada vez más chico pero siempre existiría. (Estamos?).

- El error que uno comete al medir algo suele ser del orden : la menor división de la escala del instrumento de medida. Para una regla yo estimé a ojo que el error debería andar aproximadamente en medio mm. sin embargo muchas veces ellos dicen que los errores que uno comete al medir con una regla milimetrada son el doble de lo que yo calculé. De manera que al medir con una regla el error sería de $\pm \boxed{1\ \text{mm}}$.
  (Parece un poco mucho, pero podría ser).

- Esta cuestión del error o la incerteza que aparece al medir algo vale para cualquier tipo de medición, no sólo para longitudes. Al pesar un cuerpo hay un error. Al medir un tiempo hay un error. Al calcular un volumen hay un error. Cualquiera sea la cosa que uno esté midiendo, siempre hay un error de medición.

ERROR RELATIVO ($\mathcal{E}(x)$)

Cuando mido una magnitud X obtengo un valor medido X_0 y un error absoluto ΔX. El error relativo de la magnitud X se calcula haciendo la cuenta:

$$\boxed{\mathcal{E}(x) = \frac{\Delta X}{X_0}}$$

ERROR RELATIVO DE LA MAGNITUD X

ERROR RELATIVO — ERROR ABSOLUTO — VALOR MEDIDO

EJEMPLO: La longitud del segmento era $\ell = 29{,}0 \pm 0{,}5$ mm. Su error relativo será:

$$\mathcal{E}(\ell) = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{0{,}5}{29} = \underline{0{,}017}$$

¿Por qué se lo define así al error relativo?. RTA: Bueno, porque haciendo la cuenta $\Delta X / X_0$ tengo una idea del grado de la calidad de la medición. Fijate:

Supongamos que con la misma regla anterior mido una distancia de 20 cm. El error absoluto sigue siendo el mismo, 0,5 mm. La distancia me da: $d = 200 \pm 0{,}5$ mm.

El error relativo en esta medición es:

$$\mathcal{E}(d) = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{0{,}5 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0{,}0025$$

¿Ves?. El error relativo dió más chico, pese a que en las 2 mediciones el error absoluto era el mismo.

Con el error relativo puedo comparar 2 mediciones. En este caso puedo decir que la medición de d es mucho más precisa que la de ℓ.

ERROR PORCENTUAL ($\mathcal{E}_{(x)}\%$)

El error porcentual es el error relativo multiplicado x 100.

$$\boxed{\mathcal{E}_{(x)}\% = \mathcal{E}_{(x)} \cdot 100} \leftarrow$$ Error Porcentual

Ejemplo: si en una medición de 29 mm le erro en 0,5 mm el error porcentual será:

$$\mathcal{E}_{(\ell)}\% = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \cdot 100 = \frac{0{,}5}{29} \cdot 100 = \underline{1{,}7\%}$$

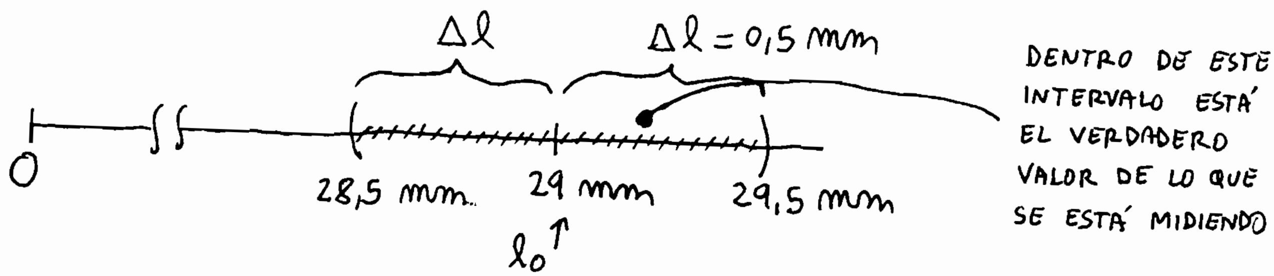
¿Qué significa un error porcentual del 1,7 porcento?

RTA: significa que cada 100 partes que mide el objeto le estoy errando como máximo en 1,7 partes.

Este último concepto es importante porque sirve para comparar distintas mediciones entre sí. Es decir, la idea es que entiendas que una medición con un 1 % de error es más precisa que otra medición con un 2 % de error. En una estoy errando en una parte cada 100. En la otra estoy errando en 2 cada 100.

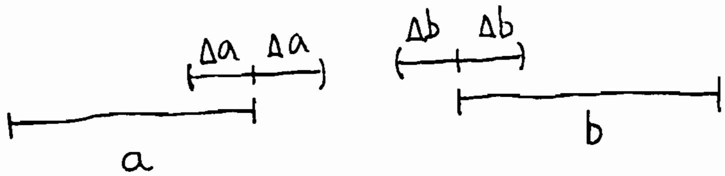
Ese es el concepto que tenés que entender.

Y una última cosa con respecto a los errores en las mediciones: Cuando uno tiene el resultado de una medición del tipo $\ell = 29 \pm 0{,}5$ mm, este resultado se representa gráficamente así:



PROPAGACIÓN DE ERRORES (Importante)

Lo que queremos resolver ahora es lo siguiente: Mido una distancia $\underline{a}$ con un error Δa y una distancia $\underline{b}$ con un error Δb. Tengo esto:



← 2 DISTANCIAS CADA UNA CON SU INCERTEZA.

La pregunta es la siguiente: cada distancia tiene su error. Si ahora sumo esas distancias...

¿Cuál será el error de la suma?

¿Será la suma de los errores? ¿Cómo es la cosa?

(La respuesta es $\boxed{\text{SÍ}}$, pero la explicación viene después).

A este tema se lo llama propagación de errores porque los errores de $\underline{a}$ y de $\underline{b}$ de alguna manera se trasladan a la suma de $a+b$.

También podría decir: ¿Y si multiplico las distancias?

¿Cuál será el error de $a \times b$?

Así cada vez que yo haga alguna cuenta usando las distancias $\underline{a}$ y $\underline{b}$ voy a tener un cierto error. Ese error es lo que quiero calcular.

La cuenta puede ser cualquier cosa: $a+b$, $a-b$, $a \times b$, a/b, $\sqrt{a^2+b^2}$, lo que sea.

Cualquier cálculo donde intervengan a y b.

Para ese cálculo siempre te van a pedir calcular el error absoluto o el error relativo.

Errores a veces no lo toman porque es medio facilongo. Generalmente le dan más importancia a cinemática y todo eso. Pero si lo llegan a tomar no te van a pedir que expliques lo que es el error de una medición. Te van a tomar un problema de propagación de errores, así que lo que sigue tenés que saberlo bien.

PROPAGACIÓN DE ERRORES - FÓRMULAS

(La deducción de estas fórmulas está después).

Supongamos que medimos 2 magnitudes a y b y obtuvimos $a = a_0 \pm \Delta a$ y $b = b_0 \pm \Delta b$. Acá los errores absolutos son Δa y Δb.

Las fórmulas para la propagación de errores absolutos son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b \\ \hline \Delta(a-b) = \Delta a \oplus \Delta b \end{array}}$$

OJO, VER

ERROR ABSOLUTO DE UNA SUMA Y DE UNA RESTA (HAY QUE SABERLAS)

También hay formulas para calcular $\Delta(a.b)$, $\Delta\left(\frac{a}{b}\right)$, $\Delta(a^m)$ y $\Delta(\sqrt[m]{a})$ pero son un choclazo y no se usan.

Las fórmulas para calcular errores relativos son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon(a.b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) \\ \varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) = \varepsilon(a) \oplus \varepsilon(b) \\ \varepsilon(a^m) = m.\varepsilon(a) \\ \varepsilon(\sqrt[m]{a}) = \frac{1}{m}.\varepsilon(a) \end{array}}$$

ver

ERRORES RELATIVOS DE LA MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN, POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN (HAY QUE SABERLAS).

También hay fórmulas para calcular $\varepsilon(a+b)$ y $\varepsilon(a-b)$
Pero al igual que antes, son un choclazo y no se usan.

EJEMPLO:

EL RESULTADO DE 2 MEDICIONES ES $a = 5 \pm 1$ cm y $b = 8 \pm 2$ cm. CALCULAR $\Delta(a+b)$, $\Delta(a-b)$, $\varepsilon(a.b)$, $\varepsilon(\frac{a}{b})$ $\varepsilon(a^4)$ y $\varepsilon(\sqrt[3]{a})$.

Acá tengo $\Delta a = 1$ cm y $\Delta b = 2$ cm. Por lo tanto lo que me piden es:

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b = 1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta(a+b) = 3 \text{ cm}}$$

Para la resta es la misma historia, así que:

$$\underline{\Delta(a-b) = 3 \text{ cm}}$$

Para el producto y la división tengo:

$$\varepsilon(a.b) = \varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) =$$

$$= \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{1 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} + \frac{2 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0{,}45$$

$$\Rightarrow \underline{\varepsilon(a.b) = \varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) = 0{,}45}$$

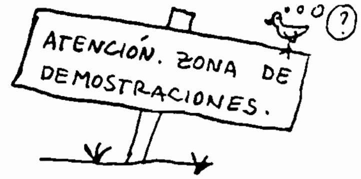
Para la potencia y la raíz tengo:

$$\varepsilon(a^4) = 4 \cdot \varepsilon(a) = 4 \cdot \frac{\Delta a}{a} = 4 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}8$$

$$\underline{\varepsilon(a^4) = 0{,}8}$$

$$\varepsilon(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3}\,\varepsilon(a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \underline{0{,}0\widehat{6}}$$

FIN TEORÍA DE ERRORES



DEDUCCIÓN DE LAS FORMULAS

Saber las demostraciones que vienen ahora no es totalmente imprescindible para poder hacer cálculos de propagación de errores. Sin embargo entender de dónde salen estas fórmulas te va ayudar a agarrar mejor el asunto.

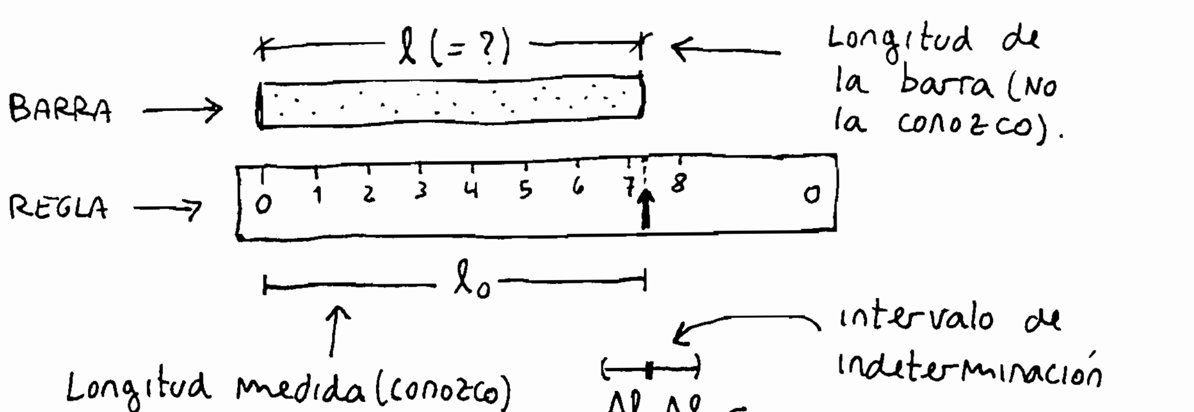
Por ejemplo, no todas las expresiones para el cálculo de errores son exactas. Algunas son aproximadas. Eso pasa porque durante la demostración se simplifican términos que son muy chicos. Para poder entender eso tenés que verlo en la deducción.

Yo te diría que por lo menos mires de donde sale el error absoluto de la suma, la 1ra demostración que pongo acá ahora, y la del error relativo del producto, que son las más importantes.

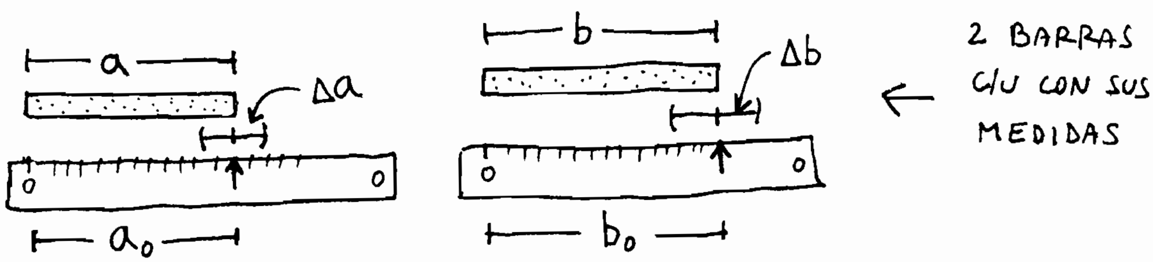
Después lo más tranquilo podés pasar a la página 29 donde están los ejercicios.

DEDUCCIÓN DEL ERROR ABSOLUTO DE LA SUMA $\Delta(a+b)$

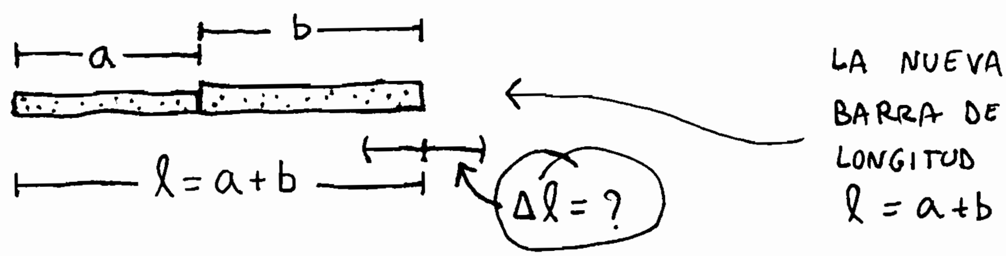
1ro pongamonos de acuerdo en ciertas cosas. Si quiero medir una barra con una regla tengo lo siguiente:



ℓ es el verdadero valor de la longitud de la barra. Ese valor es imposible de conocer con total y absoluta exactitud.
El valor aproximado de ℓ es ℓ_0 que es lo que marca la regla. $\Delta\ell$ es el error absoluto de la medición. La verdadera longitud de la barra estará comprendida en el intervalo $(\ell_0 - \Delta\ell,\ \ell_0 + \Delta\ell)$.
El resultado de la medición se pone $\ell = \ell_0 \pm \Delta\ell$. El error relativo de la medición será $\varepsilon(\ell) = \dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$ y el error porcentual será el relativo x 100.
OJO, $\Delta\ell$ no es el error cometido. $\Delta\ell$ es el $\boxed{\text{máximo}}$ error absoluto que es posible cometer.
Una vez entendidos estos conceptos, pasemos a lo siguiente:
Tengo una barra de longitud <u>a</u> y otra barra de longitud <u>b</u>. Medí ambas barras y obtuve $a = a_0 \pm \Delta a$ y $b = b_0 \pm \Delta b$



Ahora pongo una barra a continuación de la otra y digo:
Las 2 barras juntas miden una longitud $\ell = a + b$.
¿Cuál es el error absoluto de esa longitud <u>ℓ</u>?



Es decir, busco poner la longitud de la barra en la forma $\ell = \ell_0 \pm \Delta\ell$ (pero $\boxed{\text{NO}}$ midiendo la nueva barra de largo $\underline{\ell}$ sinó expresando todo en función de las 2 mediciones anteriores).

Lo que hago entonces es sumar las cantidades $\underline{a}$ y $\underline{b}$.

$$\ell = a + b = (a_0 \pm \Delta a) + (b_0 \pm \Delta b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = a_0 + b_0 \pm \Delta a \pm \Delta b$$

Acá viene la siguente observación: Los errores absolutos Δa y Δb podrían tener $\neq$ signo y restarse.

¿Puede pasar eso?

<u>RTA</u>: sí, puede pasar. Pero como no estoy seguro, conviene considerar el caso más desfavorable que es que los 2 errores se sumen en el mismo sentido.

Entonces usando el viejo truco de ponerse del lado de la seguridad sumo los 2 errores absolutos y me queda:

$$\ell = \underbrace{a_0 + b_0}_{\ell_0} \pm \underbrace{(\Delta a + \Delta b)}_{\Delta\ell}$$

Pude expresar la longitud de la barra en la forma $\ell = \ell_0 \pm \Delta\ell$. De esto saco como conclusión que $\ell_0 = a_0 + b_0$, cosa que ya sabía, y también deduzco algo que no sabía que es:

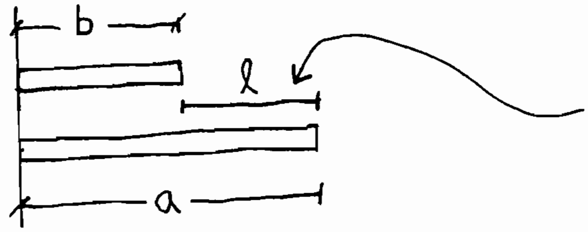
$$\boxed{\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b}$$

← ERROR ABSOLUTO DE LA SUMA

CONCLUSIÓN: El error absoluto de la suma es la suma de los errores absolutos. Esto es para 2 barras. Si hubiera tenido 3 barras de longitudes a, b y c me hubiera quedado $\Delta(a+b+c) = \Delta a + \Delta b + \Delta c$. (y lo mismo para n barras).

ERROR ABSOLUTO DE LA RESTA

Ahora pongo las barras una al lado de la otra así:



EL ERROR ABSOLUTO DE ESTA LONGITUD $l = a - b$ ES LO QUE QUIERO CALCULAR.

Busco poner l en la forma $l = l_0 \pm \Delta l$ para despejar Δl.

$$l = a - b = (a_0 \pm \Delta a) - (b_0 \pm \Delta b) \Longrightarrow$$

$$l = a_0 - b_0 \pm \Delta a \pm \Delta b$$

Aca viene la misma consideración de siempre que es ponerse en el caso más desfavorable y suponer la peor situación. Esto sería que se produzca $\Delta a + \Delta b$ y no $\Delta a - \Delta b$ (o $\Delta b - \Delta a$). En ese caso me queda:

$$l = \underbrace{a_0 - b_0}_{l_0} \pm \underbrace{(\Delta a + \Delta b)}_{\Delta l}$$

De acá se desprende que Δl es $(\Delta a + \Delta b)$, es decir:

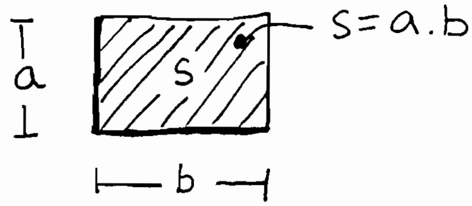
ver

$$\boxed{\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b} \longleftarrow$$

ERROR ABSOLUTO DE LA RESTA

ERROR ABSOLUTO DE LA MULTIPLICACIÓN

Pongo las 2 barras de longitudes $a = a_0 \pm \Delta a$ y $b = b_0 \pm \Delta b$ a 90^0. La superficie del rectángulo formado vale a.b. El error absoluto de esa superficie es lo que quiero calcular.



RECTANGULO DE SUPERFICIE $S = a.b$

$$S = a.b = (a_0 \pm \Delta a).(b_0 \pm \Delta b) \Rightarrow$$

$$S = a_0 b_0 \pm a_0 \Delta b \pm \Delta a . b_0 \pm \overset{0}{\cancel{(\Delta a . \Delta b)}}$$

Se supone que los términos Δa y Δb son mucho más chicos que los terminos a_0 y b_0. Entonces el término $\Delta a . \Delta b$ es mucho más chico que los otros 3 y lo puedo despreciar.

Por otra parte, poniéndome del lado de la seguridad considero que los errores absolutos Δa y Δb van a tener el mismo signo y se van a sumar. Quiere decir que el resultado final va a ser:

$$S = \underbrace{a_0 b_0}_{S_0} \pm \underbrace{(a_0 \Delta b + b_0 \Delta a)}_{\Delta S}$$

De acá sale que el error absoluto en el calculo del producto de a.b es:

$$\boxed{\Delta(a.b) = a_0 \Delta b + b_0 \Delta a}$$

ERROR ABSOLUTO DEL PRODUCTO

quiero que veas que la expresión del error absoluto del producto es aproximada. Esto pasa porque durante la demostración simplifiqué el término $\Delta a . \Delta b$.

Entonces ¿cuándo es válida la fórmula que calculé?

RTA: únicamente cuando los valores de Δa y Δb sean muy chicos comparados con a_0 y b_0. (Es decir, para mediciones muy precisas).

De todas maneras, como ya te dije antes, esta fórmula es media choclaza y no se usa nunca. Siempre que aparece un producto conviene usar la fórmula del error relativo que es más fácil. (Directamente la suma de los errores relativos).

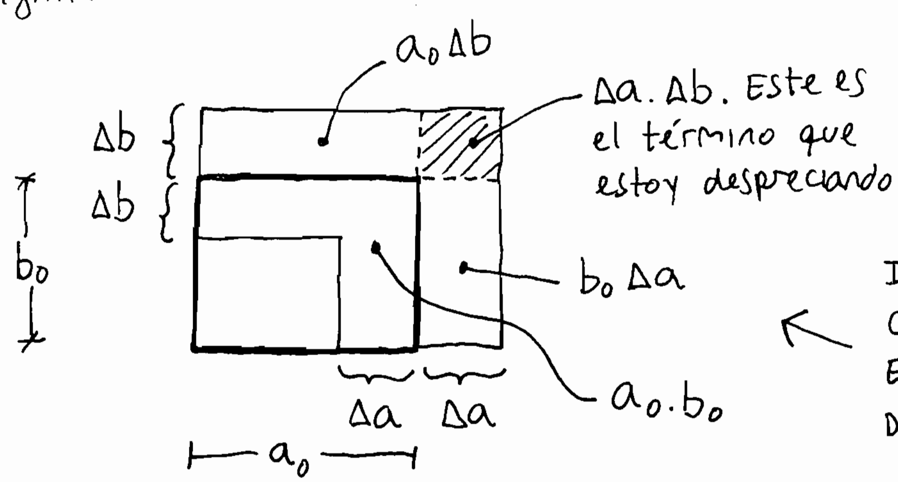
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL ERROR ABSOLUTO DEL PRODUCTO.

La fórmula que había calculado para obtener la superficie del rectángulo formado por las 2 barras era la siguiente:

$$S = a_0 b_0 \pm a_0 \Delta b \pm b_0 \Delta a \pm \cancelto{0}{(\Delta a . \Delta b)}$$

¿Qué significa ésta expresión desde el punto de vista geométrico?

RTA: significa esto:



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL ERROR ABSOLUTO DEL PRODUCTO

— o —

ERROR ABSOLUTO DEL COCIENTE

Para los valores $a = a_0 \pm \Delta a$ y $b = b_0 \pm \Delta b$ hago la cuenta $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0 \pm \Delta a}{b_0 \pm \Delta b} = \frac{(a_0 \pm \Delta a)(b_0 \mp \Delta b)}{(b_0 \pm \Delta b).(b_0 \mp \Delta b)}$$

ver

Acá lo que hice es multiplicar arriba y abajo por $(b_0 \mp \Delta b)$ para eliminar el denominador. Me queda:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0 b_0 \pm a_0 \Delta b \pm \Delta a b_0 \pm \overbrace{\cancel{(\Delta a . \Delta b)}}^{0}}{b_0^2 - \overbrace{\cancel{(\Delta b)^2}}^{0}}$$

Los términos $\Delta a . \Delta b$ y $(\Delta b)^2$ son infinitésimos de 2do orden y los desprecio. Poniendome en el caso más desfavorable me queda:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{b_0} \pm \frac{a_0 \Delta b + \Delta a\, b_0}{b_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a_0 \Delta b + b_0 . \Delta a}{b_0^2}} \leftarrow$$

ERROR ABSOLUTO DEL COCIENTE

ERROR ABSOLUTO DE a^n

Voy a calcular 1ro el error absoluto de a^2. a cuadrado es a.a. Como tengo un producto puedo usar la formula para calcular el error absoluto de un producto que era: $\Delta(a.b) = a_0 \Delta b + b_0 \Delta a$

Entonces:

$$\Delta(a.a) = a_0 \Delta a + a_0 \Delta a$$

$$\Rightarrow \Delta(a^2) = 2\, a_0 . \Delta a \leftarrow$$

ERROR ABSOLUTO DE a^2

Para calcular el error de a^3 puedo hacer $(a_0 \pm \Delta a)^3$. Me queda un choclazo pero la cuenta finalmente da:

$$\Delta(a^3) = 3\, a_0^2\, \Delta a$$ ← ERROR ABSOLUTO DE $\underline{a}$ AL CUBO

Esta expresión se puede generalizar para a^m y me queda:

$$\boxed{\Delta(a^m) = m\, a_0^{m-1} . \Delta a}$$ ← ERROR ABSOLUTO AL ELEVAR A LA m.

Sacar raíz cuadrada, cúbica o enésima es elevar a la $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{m}$, de manera que la expresión anterior vale también para sacar raíces. Me queda:

$$\boxed{\Delta\left(\sqrt[m]{a}\right) = \Delta\left(a^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\, a_0^{\frac{1}{m}-1} . \Delta a}$$ ← ERROR ABSOLUTO AL SACAR LA RAÍZ ENÉSIMA

Por ejemplo, para la raíz cuadrada queda: $\Delta\left(\sqrt[2]{a}\right) = \frac{1}{2}\, a_0^{\frac{1}{2}-1} . \Delta a = \dfrac{\Delta a}{2\sqrt{a_0}}$.

Estas son todas las demostraciones de las fórmulas para calcular errores absolutos. Repito, de todas estas expresiones las únicas que se usan son las del error absoluto de la suma y de la resta. En caso de tener productos, cocientes, potencias o raíces, siempre es más fácil trabajar con las fórmulas del error relativo.

Y justamente, la deducción de las fórmulas para los errores relativos es lo que voy a poner ahora.

DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE LOS ERRORES RELATIVOS

ERROR RELATIVO DE LA SUMA Y DE LA RESTA

El error relativo de la magnitud $a = a_0 \pm \Delta a$ vale:

$$\varepsilon(a) = \frac{\Delta a}{a_0}$$

Si ahora tengo la suma de $a+b$... ¿Cuál será su error relativo?. Bueno, aplicando la definición tengo:

$$\varepsilon(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{a_0 + b_0}$$

$\Delta(a+b)$ es el error absoluto de la suma que da $\Delta a + \Delta b$.

Tonces:

$$\boxed{\varepsilon(a+b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a_0 + b_0}} \longleftarrow \text{ERROR RELATIVO DE LA SUMA}$$

Para la resta es la misma historia porque $\Delta(a-b)$ también es $\Delta a + \Delta b$. $\Rightarrow$

$$\boxed{\varepsilon(a-b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a_0 - b_0}} \longleftarrow \text{ERROR RELATIVO DE LA RESTA}$$

Estas fórmulas son medias choclazas y no se usan. Cuando hay una suma o una resta siempre conviene usar el error absoluto.

ERROR RELATIVO DEL PRODUCTO Y EL COCIENTE

Si tengo un producto $a.b$ su error relativo lo calculo como:

$$\varepsilon(a.b) = \frac{\Delta(a.b)}{a_0\, b_0}$$

El error absoluto del producto $\Delta(a.b)$ ya lo tenía deducido de antes. Me había dado: $\Delta(a.b) = \Delta a\, b_0 + \Delta b\, a_0$.

Entonces:

$$\varepsilon(a.b) = \frac{\Delta(a.b)}{a_0 . b_0} = \frac{\Delta a . b_0 + \Delta b\, a_0}{a_0 b_0}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(a.b) = \frac{\Delta a . \cancel{b_0}}{a_0 \cancel{b_0}} + \frac{\Delta b . \cancel{a_0}}{\cancel{a_0} b_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(a.b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)} \leftarrow$$

ERROR RELATIVO DEL PRODUCTO (Recordar)

Esta formula $\boxed{\text{SI}}$ se usa así que hay que saberla. Fijate que es aproximada porque para deducir $\Delta(a.b)$ hubo que despreciar un término.

Lo que también se usa mucho en los problemas de propagación de errores es el error relativo de choclos tipo $a \times b \times c \times d \ldots$ etc. En ese caso los errores relativos también se suman y me queda: $\varepsilon(a.b.c.d \ldots z) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) + \varepsilon(c) + \ldots + \varepsilon(z)$.

Si tengo una división del tipo $\frac{a}{b}$ es la misma historia porque me queda:

$$\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a_0}{b_0}}$$

El error absoluto de $\frac{a}{b}$ ya lo había calculado antes y era el choclazo:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a_0 \Delta b + b_0 \Delta a}{b_0^2}$$

Reemplazando:

$$\mathcal{E}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a_0}{b_0}} = \frac{\frac{a_0 \Delta b + b_0 \Delta a}{b_0^{\cancel{2}}}}{\frac{a_0}{\cancel{b_0}}} = \frac{a_0 \Delta b + b_0 \Delta a}{a_0 . b_0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\cancel{a_0} \Delta b}{\cancel{a_0} b_0} + \frac{\cancel{b_0} \Delta a}{a_0 \cancel{b_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b)} \leftarrow$$ ERROR RELATIVO DEL COCIENTE $\frac{a}{b}$.

Esta fórmula también hay que saberla porque se usa. Notarás que es igual a la del producto, así que no hay que acordarse mucho.

ERROR RELATIVO DE a^m y $\sqrt[m]{a}$

Tengo a^m donde como siempre a es $a_0 \pm \Delta a$. Su error relativo lo calculo aplicando la definición:

$$\mathcal{E}(a^m) = \frac{\Delta(a^m)}{a_0^m}$$

El término $\Delta(a^m)$ ya lo había calculado antes y valía $\Delta(a^m) = m\, a_0^{m-1} \times \Delta a$. Lo reemplazo y me queda:

$$\mathcal{E}(a^m) = \frac{m . a_0^{m-1} . \Delta a}{a_0^m} = \frac{m\, \cancel{a_0^m} . a_0^{-1} . \Delta a}{\cancel{a_0^m}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(a^m) = m\, \Delta a / a_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(a^m) = m . \mathcal{E}(a)} \leftarrow$$ Error RELATIVO DE a^m.

Para la raíz enésima es la misma cosa, porque $\sqrt[m]{a}$ es $a^{\frac{1}{m}}$. De manera que en la fórmula anterior cambio m por $\frac{1}{m}$ y listo.

Me queda:

$$\boxed{\varepsilon\left(\sqrt[m]{a}\right) = \varepsilon\left(a^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\,\varepsilon_{(a)}}$$

← ERROR RELATIVO DE $\sqrt[m]{a}$

Tanto la fórmula de la potencia como la de la $\sqrt{\ }$ tenés que saberlas porque también se usan.

FIN ZONA DE DEDUCCIONES

Como ya te dije, si toman algo de errores va a ser un problema de propagación o algo por el estilo. Eso es lo que tenés que saber.

Entonces pongo ahora varios ejercicios típicos que suelen tomar.

Buena suerte.

EJERCICIOS ⟶

MEDICIONES Y ERRORES - PROBLEMAS RESUELTOS

1)- Las siguientes mediciones estan mal escritas. Escribirlas correctamente.

a) $x = 3 \pm 1$	g) $x = 2,1 \pm 1$	m) $x = 1,2 \pm 0,04$
b) $x = 2,8 \pm 1$	h) $x = 20 \pm 1,8$	n) $x = 0,228 \pm 0,2$
c) $x = 2,6 \pm 1$	i) $x = 20 \pm 1,6$	o) $x = 1,23456 \pm 0,01$
d) $x = 2,5 \pm 1$	j) $x = 20 \pm 1,5$	p) $x = 1,21 \pm 0,12345$
e) $x = 2,49 \pm 1$	k) $x = 20 \pm 1,49$	q) $x = 0,350 \pm 0,350$
f) $x = 2,4 \pm 1$	l) $x = 20 \pm 1,45$	r) $x = 2,5 \pm 0,0$

a)- $X = 3 \pm 1$

Esta medición está bien escrita.

b)- $X = 2,8 \pm 1$

Lo correcto sería poner $X = 3 \pm 1$. Esto es porque el ,8 no tiene sentido frente a un error de ± 1. Aproximo a lo más cercano que es 3.

c)- $X = 2,6 \pm 1$

Por la misma razón anterior lo correcto acá sería poner $X = 3 \pm 1$.

d)- $X = 2,5 \pm 1$

Acá es un problema. Se puede poner $X = 2 \pm 1$ o también $x = 3 \pm 1$. Habrá que revisar la medición para decidir si se la tira hacia 2 o hacia 3. Hay gente que dice que hay que dejarlo como $2,5 \pm 1$

e)- $X = 2,49 \pm 1$ ⟶ Lo pongo como $X = 2 \pm 1$

f)- $X = 2,4 \pm 1$ ⟶ $X = 2 \pm 1$

g)- $X = 2,1 \pm 1$ ⟶ $X = 2 \pm 1$

h)_ $X = 20 \pm 1{,}8$

El 1,8 lo aproximo a 2 y me queda $X = 20 \pm 2$.

i)_ $X = 20 \pm 1{,}6$

Por lo mismo que antes $\rightarrow X = 20 \pm 2$

j)_ $X = 20 \pm 1{,}5$

Acá hay problema. Puedo aproximar el 1,5 a 1 ó a 2. Poniéndome del lado de la seguridad lo aproximo a 2 y me queda $X = 20 \pm 2$.

k)_ $20 \pm 1{,}49$

Ahora 1,49 está más cerca de 1. ¿Lo dejo como 20 ± 1? Bueno, poniéndome del lado de la seguridad yo lo volvería a escribir como 20 ± 2.

l)_ $X = 20 \pm 1{,}45$

Yo lo seguiría dejando como 20 ± 2. Alguien podría decir que habría que ponerlo como 20 ± 1. Tal vez.

m)_ $X = 1{,}2 \pm 0{,}04$

Si el error es 0,04 conviene agregarle un cero al 2 para indicar que es 1,20 y no 1,2. $\rightarrow X = 1{,}20 \pm 0{,}04$

n)_ $X = 0{,}228 \pm 0{,}2 \rightarrow X = 0{,}2 \pm 0{,}2$

o)_ $X = 1{,}23456 \pm 0{,}01 \rightarrow X = 1{,}23 \pm 0{,}01$

p)_ $X = 1{,}21 \pm 0{,}12345 \rightarrow X = 1{,}2 \pm 0{,}1$

ER_M

q)- $X = 0{,}350 \pm 0{,}350$

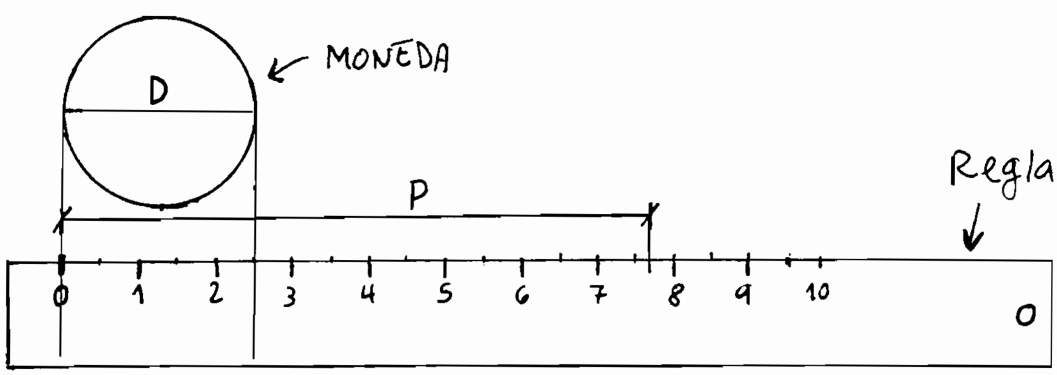
Bueno, otra vez tenemos problema acá. En principio habría que ponerlo como $X = 0{,}350 \pm 0{,}4$, pero a su vez eso me lleva a escribir el resultado de la medición como $X = 0{,}4 \pm 0{,}4$. Es una mala medición. Tiene el 100 % de error.

r)- $X = 2{,}5 \pm 0{,}0$

Esto no puede ser. No existen mediciones con error cero. El que lo escribió se equivocó.

---

2)- El circulo dibujado es el contorno de una moneda.La línea horizontal es la longitud de su perímetro. (Se la hizo girar sobre la hoja hasta que dio una vuelta entera).Medir el diametro y el perímetro con la regla que está dibujada y calcular el valor del Nro pi. (pi = perímetro / diametro). calcular el error relativo y absoluto de la medición. ¿Es pi = 3,1416 ?.



El diámetro parece medir : $D = 25 \pm 1$ mm.

El perímetro parece medir : $P = 77 \pm 1$ mm

Por lo tanto: $\pi_0 = \frac{P}{D} = \frac{77}{25} = 3{,}08$

Calculo el error con el que estoy calculando π:

$$\mathcal{E}(\pi) = \mathcal{E}\left(\frac{P}{D}\right) = \mathcal{E}(P) + \mathcal{E}(D) = \frac{1}{77} + \frac{1}{25} = \underline{0{,}053} \leftarrow \mathcal{E}(\pi)$$

$$\Rightarrow \Delta\pi = \pi_0 \cdot \mathcal{E}(\pi) = 3{,}08 \cdot 0{,}053$$

$$\underline{\Delta\pi = 0{,}16}$$

$$\Rightarrow \pi = 3{,}08 \pm 0{,}16$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi = 3{,}1 \pm 0{,}2}$$

Bueno, no dió muy mal que digamos. Entonces: ¿ES $\pi = 3{,}1416$?

RTA: NO sé. Según mi medición PI es igual a 3,1 con un error del 5 %. ESO es lo único que puedo decir.

---

3)- Un alumno va de la casa a la facultad en colectivo. Los tiempos parciales que tarda son:
caminar hasta la parada: $t_1 = 4 \pm 1$ minuto.
Esperar el colectivo: $t_2 = 5 \pm 2$ min.
viaje propiamente dicho : $t_3 = 32 \pm 8$ min.
caminar del colectivo a la facultad : $t_4 = 2 \pm 1$ min.
Calcular el tiempo total de viaje con sus errores relativo y absoluto.

El tiempo total de viaje es: $t_t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

$$\Rightarrow t_{t_0} = 4 + 5 + 32 + 2$$

$$\underline{t_{t_0} = 43 \text{ minutos}}$$

$$\Delta t_t = \Delta(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4$$

$$\Rightarrow \Delta t_t = 1 + 2 + 8 + 1$$

$$\underline{\Delta t_t = 12 \text{ minutos}} \leftarrow \text{Error absoluto}$$

Por lo tanto puedo expresar el tiempo total del viaje como:

$$t_t = 43 \pm 12 \text{ minutos}$$

Ahora este resultado hay que escribirlo correctamente. El 12 lo aproximo a 10 y el 43 a 40.

$$\boxed{t_t = 40 \pm 10 \text{ min}} \leftarrow$$ TIEMPO TOTAL DE VIAJE.

El error relativo será:

$$\varepsilon(t_t) = \frac{\Delta t(t)}{t_{t_0}} = \frac{12}{43} = \underline{0{,}28} \quad (28\%) \leftarrow$$ ERROR RELATIVO

---

4)- Suponiendo que pi es 3,1416 , calcular el error porcentual que cometo si lo tomo como:
a) pi = 3
b) pi = 3,1
c) pi = 3,14
d) pi = 3,142

a) $\varepsilon(\pi)_{\%} = \frac{\Delta\pi}{\pi_0} \cdot 100 = \frac{(3{,}1416-3)}{3} \cdot 100 = 4{,}7\,\%$

b)- $\varepsilon(\pi) = \frac{(3{,}1416-3{,}1)}{3{,}1} \cdot 100 = 1{,}3\,\%$

c)- $\varepsilon(\pi) = \frac{(3{,}1416-3{,}14)}{3{,}14} \times 100 = 0{,}05\,\%$

d)- $\varepsilon(\pi) = \frac{(3{,}1416-3{,}142)}{3{,}142} \times 100 = 0{,}01\,\%$

---

5)- Un alumno tiene que resolver una guía con 14 problemas.para resolver c/ problema suele tardar 10 o 20 minutos.¿cuánto tiempo le llevara resolver la guía entera ?.¿Sería razonable prometer estar libre en 4 hs ?.

Veamos - veamos lo que quiere decir este enunciado.

¿Resolver un problema en 10 o 20 minutos?

ER

Eso significa que desde el punto de vista Físico $t = 15 \pm 5$ min.

Si tiene que resolver 14 problemas: $t_{total} = 14\, t$

$$\Rightarrow t_{total_0} = 14 \times 15 = 210 \text{ min} = \underline{3{,}5 \text{ hs}}.$$

$$\mathcal{E}(t_t) = \mathcal{E}(14.t) = \cancel{\mathcal{E}(14)}^{0} + \mathcal{E}(t) = \frac{\Delta t}{t_0} = \frac{5}{15} = 0{,}33$$

$$\Rightarrow \Delta t_t = t_{t_0} \cdot \mathcal{E}(t_t) = 3{,}5 \text{ hs} \cdot 0{,}33$$

$$\Delta t_t = 1{,}17 \text{ hs}.$$

$$\Rightarrow t_{total} = 3{,}5 \pm 1{,}2 \text{ hs}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{total} = 4 \pm 1 \text{ hs}}$$ ← Tiempo total que tarda en resolver la guiá.

¿Si es razonable suponer que para resolver toda la guia va a tardar 4 hs?. Bueno, poniéndonos del lado de la seguridad, no. Podría llegar a tardar hasta 5 hs.

---

6)- La velocidad de la luz es c = 299.792 ± 13 km/s. ¿Cuál es su error porcentual ?.

$$\mathcal{E}(c)\% = \frac{\Delta c}{c} \times 100 = \frac{13}{299.792} \times 100 \Rightarrow$$

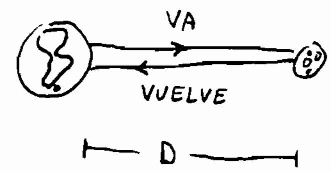
$$\boxed{\mathcal{E}(c)\% = 0{,}004\,\%}$$ ← ERROR PORCENTUAL EN EL CALCULO DE C

Este error es muy chiquito. ¿Cómo habrán hecho para lograr una medición tan precisa?. (Incluso creo que existen valores de c todavía más exactos).

ER

7)- Se envía un rayo laser a la luna. Este tarda en ir y volver 2,55 ± 0,01 segundos. ¿cuál es la distancia a la luna ?.

$$t = \frac{2D}{c} \Rightarrow 2D = c.t \Rightarrow D_0 = C_0 . t_0 . \frac{1}{2}$$



$$D_0 = 299.792 \text{ Km} . 2,55 . 0,5$$

$$D_0 = 382\,234,8 \text{ Km}$$

Calculo el error en este cálculo: $\varepsilon_{(D)} = \varepsilon(0,5 . c . t)$

$$\Rightarrow \varepsilon_{(D)} = \overset{0}{\cancel{\varepsilon(0,5)}} + \varepsilon_{(c)} + \varepsilon_{(t)}$$

El Nro 0,5 no tiene error. No es el resultado de una medición. Por eso lo simplifiqué. Los otros 2 errores valen:

$$\varepsilon_{(D)} = \frac{\Delta c}{c_0} + \frac{\Delta t}{t_0} = \frac{13}{299.792} + \frac{0,01}{2,55}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{(D)} = \overset{0}{\cancel{4 \times 10^{-5}}} + 0,004$$

El 4×10^{-5} lo simplifiqué porque es despreciable frente al 0,004. Dicho de otra manera, la velocidad de la luz tiene suficiente precisión como para considerarla exacta en este cálculo.

$$\Rightarrow \underline{\varepsilon_{(D)} \simeq 0,4\,\%}$$

El error absoluto de esta medición es: $\varepsilon_{(D)} = \frac{\Delta D}{D_0} \Rightarrow \Delta D = \varepsilon_{(D)} . D_0$

$$\Rightarrow \Delta D = 0,004 \times 382\,234 \text{ Km}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta D = 1499 \text{ Km}}$$

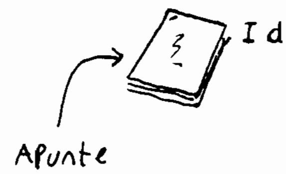
Por lo tanto:

$$\boxed{D = 382.000 \pm 2000 \text{ Km}} \leftarrow$$

DISTANCIA TIERRA- LUNA.

8)- Se mide el espesor de un apunte de 20 hojas y da e = 2,1 ± 0,2 milímetros. Calcular el espesor de una hoja y su error relativo.

$$d = 2{,}1 \text{ mm} \Rightarrow e_0 = \frac{2{,}1}{20} \text{ mm}$$



$$\underline{e_0 = 0{,}105 \text{ mm}}$$

Este es el valor del espesor de una hoja. Ahora hay que ver que error tiene:

$$\varepsilon(e) = \varepsilon\left(\frac{d}{20}\right) = \varepsilon(d) + \overset{0}{\cancel{\varepsilon(20)}}$$

El error del número 20 es cero porque el Nº de hojas lo conozco con exactitud. $\Rightarrow$

$$\varepsilon(e) = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0{,}2}{2{,}1} = \underline{0{,}095} \quad (9{,}5\ \%)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(e) = \frac{\Delta e}{e_0} \Rightarrow \Delta e = e_0 \cdot \varepsilon(e)$$

$$\Rightarrow \Delta e = 0{,}105 \text{ mm}\, 0{,}095 = \underline{0{,}01 \text{ mm}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{e = 0{,}11 \pm 0{,}01 \text{ mm}} \leftarrow$$

ESPESOR DE UNA HOJA

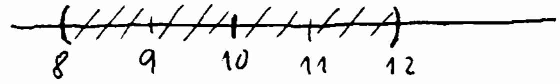
¿Conocer el espesor de una hoja con una apreciación de una centésima de milímetro? ¡No es una mala medición!

---

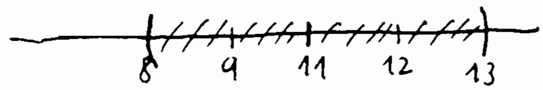
9)- ¿Cuáles de estas medidas pueden ser consideradas iguales ?.
d1 = 10 ± 2 cm , d2 = 11 ± 2 cm , d3 = 2,35 ± 0,05 cm , d4 = 2,24 ± 0,04 cm , d5 = 2,30 ± 0,03

Para responder esto conviene representar las medidas con sus intervalos de error. Ahí hay que fijarse si hay parte de los intervalos que se superponen.

$d_1 = 10 \pm 2$ cm

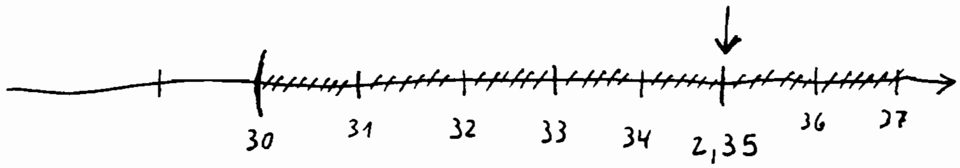


$d_2 = 11 \pm 2$ cm

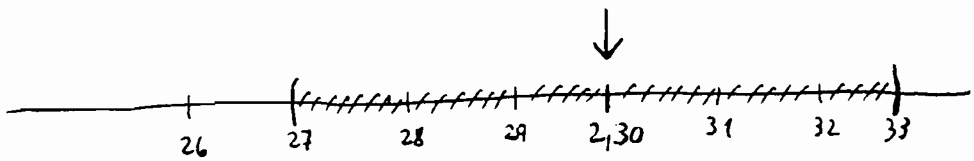


d_1 y d_2 pueden ser consideradas iguales porque abarcan aprox. el mismo intervalo.

$d_3 = 2{,}35 \pm 0{,}05$



$d_4 = 2{,}24 \pm 0{,}04$



$d_5 = 2{,}30 \pm 0{,}03$

d_3 y d_4 NO representan la misma medición. Son medidas distintas. Con respecto a d_5... Hummm...

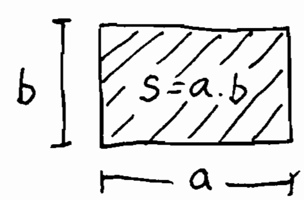
A fin de ser rigurosos d_5 podría ser tanto igual a d_4 como a d_3. Desde ya que d_5 se acerca más a d_3, pero los intervalos de error son los intervalos de error y hay que respetarlos. En principio d_5 podría ser perfectamente igual a d_4...

10)-Los lados de un rectangulo miden 5 ± 1 cm y 8 ± 2 cm. ¿Cuanto vale su superficie ?

$S = a.b \Rightarrow S_0 = a_0 b_0 = 5 . 8 = \underline{40 \text{ cm}^2}$

$\varepsilon(S) = \varepsilon(a.b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$

$\varepsilon(S) = \frac{1}{5} + \frac{2}{8} = 0{,}45$



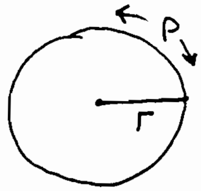
$$\mathcal{E}(s) = \frac{\Delta S}{S_0} \Rightarrow \Delta S = S_0 \cdot \mathcal{E}(s) = 40 \text{ cm}^2 \cdot 0{,}45 = 18 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 40 \pm 20 \text{ cm}^2} \leftarrow$$ SUPERFICIE DEL RECTÁNGULO.

---

11)-El radio de un circulo mide 4 ± 1 cm. Hallar el error relativo que se comete al calcular su perímetro y su superficie.

El Perímetro de un círculo es $P = 2\pi r$



$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(2\pi r) = \cancel{\mathcal{E}(2)}^{0} + \cancel{\mathcal{E}(\pi)}^{0} + \mathcal{E}(r)$$

2 ES un Nº exacto y no tiene error. Pi no es un Nº exacto pero puedo tomarlo con 8 decimales de manera que el error sea despreciable. Me queda entonces sólo el error relativo del radio:

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(r) = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathcal{E}(P) = 0{,}25} \quad \underline{(25\,\%)} \leftarrow$$ ERROR RELATIVO DEL PERÍMETRO

Para la superficie tengo: $S = \pi r^2$. Haciendo la propagación de errores:

$$\mathcal{E}(s) = \cancel{\mathcal{E}(\pi)}^{0} + \mathcal{E}(r^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(s) = 2\,\mathcal{E}(r) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}(s) = 2\,\frac{\Delta r}{r} = 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{E}(s) = 0{,}5} \quad (50\,\%) \leftarrow$$ ERROR RELATIVO DE LA SUPERFICIE

Notar que el error al medir el radio influye más en la superficie que en el perímetro.

---

12)-La distancia recorrida por una cosa que cae en caida libre sin velocidad inicial es $x = \frac{1}{2} g . t^2$. Calcular $x = x \pm \Delta x$ suponiendo que se mide g con un error Δg y t con un error Δt.

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}\left(\tfrac{1}{2} g t^2\right) = \cancelto{0}{\mathcal{E}\left(\tfrac{1}{2}\right)} + \mathcal{E}(g) + \mathcal{E}(t^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(g) + 2\,\mathcal{E}(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(x) = \frac{\Delta g}{g_0} + 2\,\frac{\Delta t}{t_0} \leftarrow$$ ERROR RELATIVO DE LA MEDICIÓN

Teniendo el error relativo multiplico por X_0 $\left(= \frac{1}{2} g_0 t_0^2\right)$ y saco el error absoluto:

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\Delta X}{X_0} \Rightarrow \Delta X = \mathcal{E}(x) . X_0$$

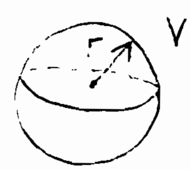
$$\Rightarrow \Delta X = \left(\frac{\Delta g}{g_0} + 2\,\frac{\Delta t}{t_0}\right) \cdot \frac{1}{2} g_0 t_0^2$$

$$\Delta X = \frac{1}{2} \Delta g\, t_0^2 + \Delta t\, g_0 t_0$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{2} g_0 t_0^2 \pm \left(\frac{1}{2} t_0^2 \Delta g + g_0 t_0 \Delta t\right)} \leftarrow$$ EXPRESIÓN FINAL DE LA DISTANCIA

---

13)-El volumen de una esfera es : $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.
Hacer la propagación de erores.
¿Es cierto que para determinar el volumen de una esfera hay que tener mucho cuidado al medir el radio ? ¿Por qué ?



$$\mathcal{E}(v) = \mathcal{E}\left(\tfrac{4}{3} \pi r^3\right) = \cancelto{0}{\mathcal{E}\left(\tfrac{4}{3}\right)} + \cancelto{0}{\mathcal{E}(\pi)} + \mathcal{E}(r^3)$$

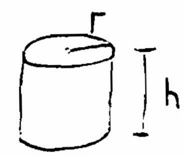
$$\Rightarrow \mathcal{E}(v) = 3\,\mathcal{E}(r) = 3\,\frac{\Delta r}{r_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(v) = 3\,\frac{\Delta r}{r_0}} \leftarrow$$ ERROR RELATIVO DEL VOLUMEN DE UNA ESFERA.

De acuerdo a este resultado que obtuve puedo decir que efectivamente, para calcular el volumen de una esfera hay que medir con mucha precisión el radio. Esto pasa porque al estar r^3 en la fórmula si calculo r con un determinado error relativo (digamos 25 %), al calcular el volumen este error relativo se $\boxed{\text{triplicará}}$ $(\varepsilon_{(V)} = 75\%)$.

---

14)-Propagar errores en la formula $v = \pi . r^2 . h$
(Volumen de un cilindro).
¿Qué hay que medir con más precisión , r o h ?.



$$\mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(\pi r^2 h) = \cancel{\mathcal{E}}(\pi) + \mathcal{E}(r^2) + \mathcal{E}(h)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(v) = 2\,\mathcal{E}(r) + \mathcal{E}(h)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(v) = 2\frac{\Delta r}{r_0} + \frac{\Delta h}{h_0}}$$

$\leftarrow$ ERROR RELATIVO DEL VOLUMEN DE UN CILINDRO.

Hay que medir r con más preción porque en la fórmula está al^2 y su error relativo se duplica.

---

15)-El período de un péndulo es $T = 2.\pi.\sqrt{1/g}$
Se quiere usar esta fórmula para calcular g midiendo T y l. Hacer la propagación de errores. ¿Qué magnitud hay que medir con mayor precisión ?

Despejo g:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$$

$$\Rightarrow g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

$$\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}(4\pi^2\, l/T^2)$$

$$\varepsilon(g) = \varepsilon\left(4\pi^2 \frac{l}{T^2}\right) = \cancelto{0}{\varepsilon(4)} + \cancelto{0}{\varepsilon(\pi^2)} + \varepsilon(l) + \varepsilon(T^2)$$

$$\varepsilon(g) = \varepsilon(l) + 2\,\varepsilon(T)$$

$$\boxed{\varepsilon(g) = \frac{\Delta l}{l} + 2\,\frac{\Delta T}{T}} \leftarrow$$

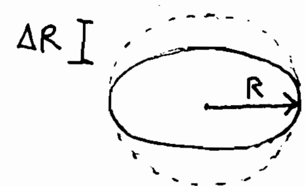
ERROR RELATIVO DE LA GRAVEDAD

Mirando la fórmula veo que lo que hay que medir con mayor precisión es el período T. Está al ^{2} en la fórmula y su error relativo se duplica.

---

16)-La Tierra tiene un achatamiento de alrededor de 20 km en cada polo. ¿Qué error porcentual representa este valor ? (R = 6380 km). ¿Es correcto decir que La Tierra es una esfera ?.

$$\varepsilon(R) = \frac{\Delta R}{R} = \frac{20\ Km}{6380\ Km} = 3{,}13 \times 10^{-3}$$

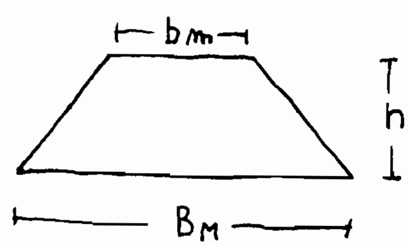


$$\underline{\varepsilon(R)\% = 0{,}3\ \%}$$

Yo diría que es bastante correcto afirmar que La Tierra es una esfera casi perfecta porque el error relativo que se comete es menor que el 1 %.

---

17)-Propagar errores en la formula de la superficie de un trapecio.



La fórmula de la superficie de un trapecio es base mayor + base menor por altura sobre dos.

$$S = (B_M + b_m)\,\frac{h}{2}$$

$$\varepsilon(S) = \varepsilon(B_M + b_m) + \varepsilon(h) + \cancelto{0}{\varepsilon(2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(B_M + b_m) + \mathcal{E}(h)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(S) = \frac{\Delta(B_M + b_m)}{B_{M_0} + b_{m_0}} + \frac{\Delta h}{h_0}$$

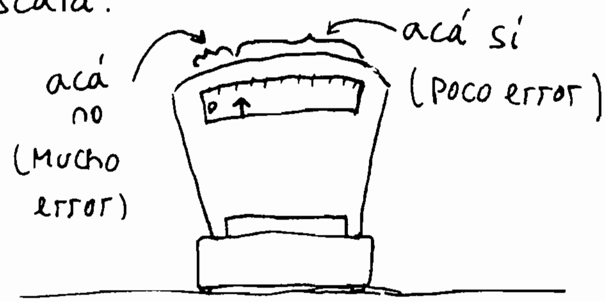
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(S) = \frac{\Delta B_M + \Delta b_m}{B_{M_0} + b_{m_0}} + \frac{\Delta h}{h_0}}$$

← ERROR RELATIVO EN EL CÁLCULO DE LA SUPERFICIE DE UN TRAPECIO.

---

18)-En las balanzas de los supermercados suele estar escrito lo siguiente : e = 10 g. Prohibido pesar por debajo de la capacidad mínima. ¿Qué significa esta frase ?

e es el error absoluto de la medición. Digamos que si una cosa marca que pesa 100 g, en realidad pesa 100 ± 10 g. Con respecto a lo de la capacidad mínima, bueno lo que pasa es que las balanzas tienen un gran error al principio de la escala.



Es decir, si la capacidad mínima es 50 gramos, ellos no te garantizan que pesando algo entre 0 y 50 g el error sea menor que 10 g. Seguramente será mucho mayor. Este asunto vale para balanzas de agujas o digitales, porque el principio de funcionamiento es el mismo y la precisión es la misma. La única ventaja de los instrumentos digitales es que no hay error de lectura.

---

19)-Un alumno desea terminar la guía de errores e irse a Brasil.
Para eso hace las siguientes estimaciones:

Pasaje en avión (Rio): Entre 300 y 400 uss
Estadía 15 dias : Entre 200 y 300 uss
Alquiler del depto: 70 a 110 uss.
Pitos y flautas: Entre 50 y 250 uss.
Gastos de emergencia: Entre 0 y 300 uss.

¿Cuánto dinero debe llevar a Brasil ?

Bueno, los gastos son los siguientes (los considero mediciones con su error):

$$g_1 = 350 \pm 50 \text{ u\$s}$$

$$g_2 = 250 \pm 50 \text{ u\$s}$$

$$g_3 = 90 \pm 20 \text{ u\$s}$$

$$g_4 = 150 \pm 100 \text{ u\$s}$$

$$g_5 = 150 \pm 150 \text{ u\$s}$$

$$G_{Total_0} = g_{1_0} + g_{2_0} + g_{3_0} + g_{4_0} + g_{5_0} = 350 + 250 + 90 + 150 + 150$$

$$G_{Total_0} = 990 \text{ u\$s}$$

El error absoluto será: $\Delta G_{Total} = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 + \Delta g_5$

$$\Delta G_{Tot} = 50 + 50 + 20 + 100 + 150$$

$$\Rightarrow \Delta G_{Tot} = 370 \text{ u\$s}$$

Por lo tanto desde el punto de vista teórico sus gastos totales ascenderían a:

$$\boxed{G_{Tot} = 990 \pm 370 \text{ u\$s}} \leftarrow$$ CIFRA TEÓRICA A GASTAR

Sin embargo, yo personalmente me pondría del lado de la seguridad y llevaría $990 + 370 = 1360$ u$s

20)-Propagar errores en las siguientes formulas:

a)_ $x = \frac{a - b}{c}$ $\quad x = \frac{a + b}{c^2}$ $\quad$ c)_ $x = \frac{a - b^2}{c^2 \cdot d}$ $\quad$ d)_ $x = \frac{a}{b} + \frac{b - c}{5d^3}$

a)_ $x = \frac{a-b}{c} \Rightarrow \varepsilon_{(x)} = \varepsilon(a-b) + \varepsilon(c) \Rightarrow$

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta(a-b)}{a_0 - b_0} + \frac{\Delta c}{c_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(x) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a_0 - b_0} + \frac{\Delta c}{c_0}}$$

b)- $x = \frac{a+b}{c^2} \Rightarrow \varepsilon(x) = \varepsilon(a+b) + \varepsilon(c^2) \Rightarrow$

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta(a+b)}{a_0 + b_0} + 2\,\varepsilon(c)$$

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a_0 + b_0} + 2\,\frac{\Delta c}{c_0}}$$

c)- $x = \frac{a-b^2}{c^2 \cdot d} \Rightarrow \varepsilon_{(x)} = \varepsilon(a-b^2) + \varepsilon(c^2 \cdot d)$

$$\Rightarrow \varepsilon(x) = \frac{\Delta(a-b^2)}{a_0 - b_0^2} + \varepsilon(c^2) + \varepsilon(d)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta a + \Delta(b^2)}{a_0 - b_0^2} + \frac{\Delta(c^2)}{c_0^2} + \frac{\Delta d}{d_0}$$

¿cuánto vale el error absoluto de una magnitud al ^{2}?

veamos:

$$\varepsilon(z^2) = 2\,\varepsilon(z) = 2\,\frac{\Delta z}{z_0}$$

$$\varepsilon(z^2) = \frac{\Delta(z^2)}{z_0^2} \Rightarrow \Delta(z^2) = z_0^2 \cdot \varepsilon(z^2)$$

Como el error relativo de z^2 ya lo había calculado $\left(\mathcal{E}_{(z^2)} = \frac{2\,\Delta z}{z_0} \right)$, me queda:

$$\Delta(z^2) = z_0^2 \cdot \mathcal{E}_{(z^2)} = \cancel{z_0^2} \cdot 2 \frac{\Delta z}{\cancel{z_0}}$$

$$\Rightarrow \Delta(z^2) = 2\, z_0 \cdot \Delta z.$$

Volviendo al problema, el choclazo queda:

$$\boxed{\mathcal{E}(x) = \frac{\Delta a + 2\, b_0 \Delta b}{a_0 - b_0^2} + \frac{2\, c_0\, \Delta c}{c_0^2} + \frac{\Delta d}{d_0}}$$

d)- $X = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b-c}{5\,d^3}$

$$X = \frac{a\,5d^3 + b(b-c)}{b\,d^3\,5} \quad \ldots$$

Hummm... Creo que por acá es muy largo. No me suena. Probemos esto otro:

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}\left(\frac{a}{b} + \frac{b-c}{5d^3} \right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\Delta\left(\frac{a}{b} + \frac{b-c}{5d^3} \right)}{\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0 - c_0}{5\, d_0^3}}$$

Creo que por acá también es muy largo. Probemos trabajar diréctamente con el error absoluto a ver que pasa:

$$\Delta(X) = \Delta\left(\frac{a}{b} + \frac{b-c}{5d^3} \right)$$

Esto queda:

$$\Delta(x) = \Delta\left(\frac{a}{b}\right) + \Delta\left(\frac{b-c}{5d^3}\right)$$

Humm... Creo que por acá tampoco voy a ninguna parte.

Conclusión:

¡Que este ejercicio lo resuelva Magoya!
