VERDE

G8M
MAS

ASIMOV

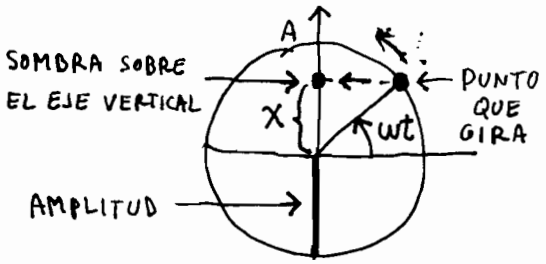
MOVIMIENTO ARMONICO.

TEORIA Y PROBLEMAS RESUELTOS.

MAS

RESUMEN:

EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO, LA POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACION ESTAN DADAS POR:

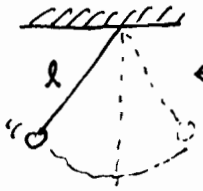


$$\begin{cases} x = A \operatorname{sen} \omega t \\ v = A\omega \cos \omega t \\ a = \ominus A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

← ECUACIONES

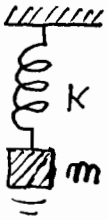
$(\equiv a = \ominus \omega^2 x)$

PUEDO GENERAR UN MOVIMIENTO ARMÓNICO PROYECTANDO UN MOVIMIENTO CIRCULAR SOBRE UN EJE. LOS PENDULOS Y LOS RESORTES CON COSAS COLGADAS TIENEN MOVIMIENTO ARMÓNICO. CARACTERISTICA FUNDAMENTAL DE ESTE MOVIMIENTO: ACELERACION PROPORCIONAL A LA SEPARACIÓN DE LA POSICION DE EQUILIBRIO PERO DE SENTIDO CONTRARIO. $(a = -\omega^2 x)$.



← PENDULO

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



RESORTE

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

ω = VELOCIDAD ANGULAR (= PULSACION) $= \frac{2\pi}{T}$

$T = 1/f$

PERIODO — FRECUENCIA

H

MAS
981204

MOVIMIENTO ARMÓNICO

TEORÍA

Para entender movimiento armónico hay que saber algo de movimiento circular, trigonometría y resortes. (Ley de Hooke y todo eso).

Va acá un repaso. (Podés pasarlo rápido).

MOVIMIENTO CIRCULAR

Cuando una cosa da vueltas se dice que tiene movimiento circular. (Una calesita, La Tierra alrededor del sol, las agujas de un reloj, un compact disc, etc).

La velocidad de giro se llama velocidad angular omega (ω o Ω) y se mide en revoluciones por minuto (RPM) en la industria y en radianes por segundo en la Física. El pasaje de unidades es así: como 1 vuelta son 2π rad, si me dan una velocidad angular de 20 RPM tengo:

$$\underbrace{\omega = 20\ \text{RPM}}_{\text{En RPM}} = 20\ \frac{\text{vueltas}}{60\ \text{seg}} = 20 \cdot \overset{\text{1 vuelta}}{(2\pi)}\ \frac{\overset{\text{indica radianes}}{1}}{60\ \text{seg}} = \underbrace{2{,}09\ \frac{1}{s}}_{\text{EN RAD/SEG}}$$

El tiempo que tarda en dar una vuelta se llama período $\underline{T}$. Se mide en segundos.

El Nº de vueltas que da en 1 segundo se llama frecuencia $\underline{f}$ y se mide en <u>Hertz</u> (1 Hz = 1/seg)

Si pensás un poco te vas a dar cuenta de que:

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}$$

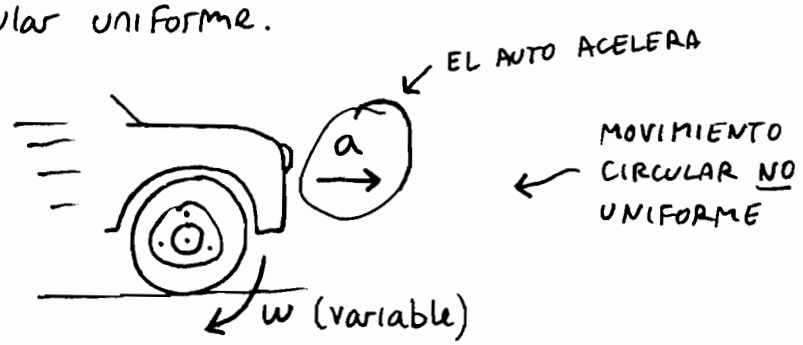
Período Frecuencia

← RELACIÓN ENTRE EL PERÍODO Y LA FRECUENCIA

También está esta otra expresión:

$$\boxed{\omega \left[\frac{rad}{seg}\right] = \frac{2\pi\,[rad]}{T\,[seg]} = 2\pi f}$$

Si la velocidad angular es constante se dice que el movimiento es circular $\boxed{\text{UNIFORME}}$. Siempre que yo diga: "Tal cosa se mueve con movimiento circular", se supone que estoy hablando de movimiento circular uniforme.

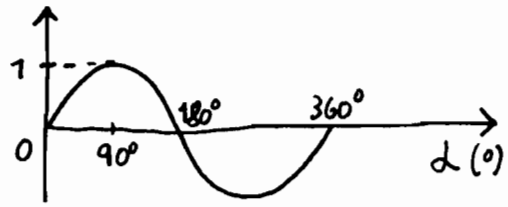


Puede haber movimiento circular variado cuando $\underline{\omega}$ aumenta o disminuye. (como en el caso del auto que va cada vez más rápido, como un trompo que se frena y todo eso).

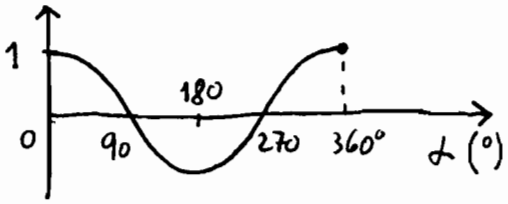
TRIGONOMETRÍA

Si uno tiene un triángulo rectángulo así →

ellos definen las funciones trigonométricas sen α y cos α como:
sen α = OP/hip y cos α = ady/hip.
La cuestión es que al representar el valor de estas funciones para ángulos que van de 0 a 360° se obtiene una cosa así:



← REPRESENTACIÓN DE SENO DE α



← REPRESENTACIÓN DE y = cos α

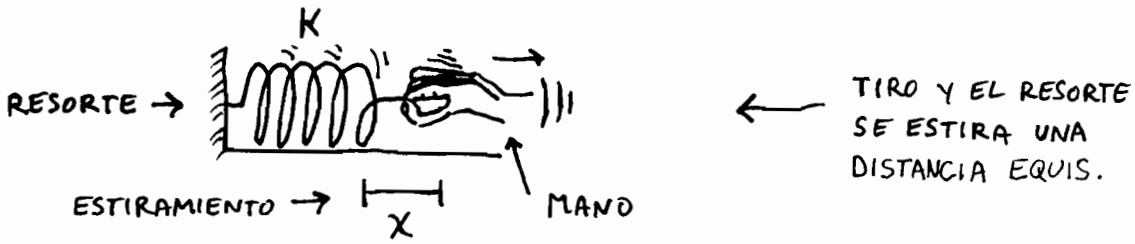
Lo que hay que saber acá es que sen α y cos α son la misma función, sólo que una es la otra corrida 90°.

Sen de α y cos α son funciones $\boxed{\text{PERIÓDICAS}}$, quiere decir que pasado un determinado lugar, empiezan a repetirse siempre igual.

El movimiento armónico también se repite siempre igual. Hay una relación muy importante entre el movimiento armónico y las funciones seno y coseno.
La explicación la pongo después.
Vamos a otro tema que vos ya creías olvidado:

LEY DE HOOKE (Resortes)

Si uno tiene un resorte y lo quiere estirar, tiene que hacer una fuerza. Más fuerza uno hace, más se estira.



Este asunto de que a mayor fuerza, mayor estiramiento se conoce como ley de Hooke y se escribe en forma física como $F = K.X$.

El valor K es una constante y sin hilar fino digamos que no depende del estiramiento. K es una medida de la "estirabilidad" del resorte, es decir, que tan fácil o tan difícil es de estirar ($\Rightarrow$ A mayor K, el resorte es más duro).

¿Y equis?. X es lo que se suele llamar estiramiento o elongación. (Elongar = estirar).

Ahora vamos a las siguientes aclaraciones:

- Atención, la elongación es el estiramiento medido DESDE LA POSICIÓN DE EQUILIBRIO. (Momento en que el resorte no está ni comprimido ni estirado).

- La ley de Hooke vale tanto para el estiramiento como para la compresión.

- La ley de Hooke no sólo dice que a mayor fuerza, mayor estiramiento, sinó que indica que el aumento de la fuerza es **LINEAL** con el estiramiento. (Lineal = directamente proporcional).

Bien, vamos ahora a la cuestión del signo ⊖ que es el nudo del asunto.

EL SIGNO ⊖ EN LA LEY DE HOOKE. (Leer)

La pregunta es esta: Cuando uno dice que la fuerza ejercida es K.X... ¿Se refiere a la fuerza que uno hace sobre el resorte o a la que el resorte ejerce sobre uno?

RTA: Bueno, eso que importa. Las 2 fuerzas son iguales. son par acción-reacción. Cualquiera de las 2 en módulo vale Ka por equis.

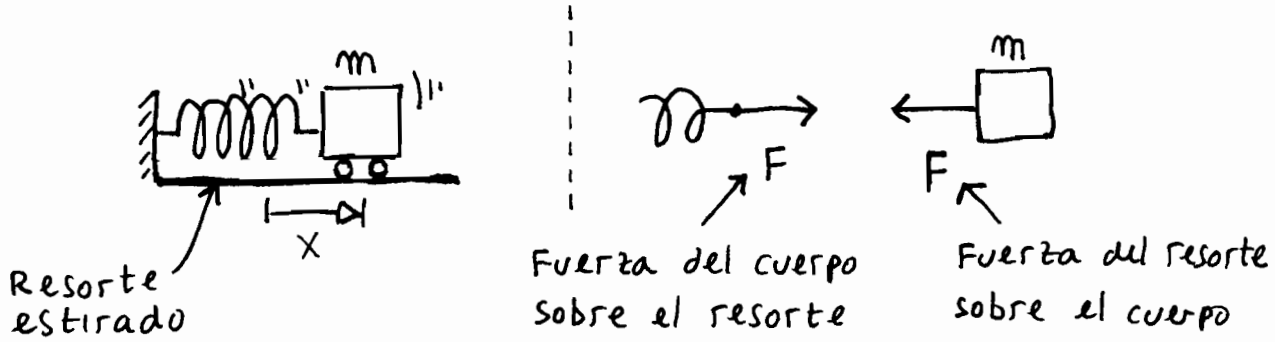
Bueno, justamente, EN MÓDULO son iguales. Pero vos sabés que en física el signo de un vector indica el sentido, es decir, para que lado apunta. (El vector).

La cuestión es que cuando viste ley de Hooke en dinámica, al signo menos de $F = \ominus K.X$ no se le daba tanta importancia. Ahora va a importar.

Así que hay que decidir bien de qué fuerza estamos hablando, si de la del resorte sobre el cuerpo o si la del cuerpo sobre el resorte.

Bueno hagamos un dibusito.

Tengo un resorte estirado que tiene agarrado un cuerpo de masa m.
Acá está el dibujo:



En los problemas de movimiento armónico lo que importa es la fuerza que actúa sobre lo que oscila (La masa m).

De manera que por conveniencia la fuerza que voy a considerar es esta: $\xleftarrow{F}\square$.

Ahora fijate, según el dibujo, la fuerza que actúa va para $\xleftarrow{F}$ allá. Pero el estiramiento x va para $\xrightarrow{x}$ allá.

Por lo tanto, al tener sentidos contrarios los vectores fuerza y elongación, la ley de Hooke quedaría así:

VER

$$\boxed{\vec{F} = \ominus K . \vec{x}}$$

LEY DE HOOKE ESCRITA EN FORMA VECTORIAL

FUERZA QUE TIRA DEL CUERPO

CTE DEL RESORTE

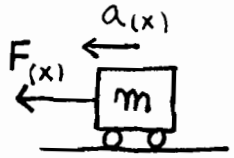
ESTIRAMIENTO DEL RESORTE

En esta expresión el signo menos no tiene un significado extraño o algo por el estilo. El signo $\ominus$ sólo reemplaza a la frase "EN SENTIDO CONTRARIO AL DESPLAZAMIENTO".

Ahora quiero que notes lo siguiente: Las fuerzas que ejercen los resortes <u>NO</u> <u>SON</u> <u>CONSTANTES</u>. Varían con la posición. (Esta es la 1ra de las fuerzas variables que se ve en Física. La otra es la gravitatoria, que varía con la altura).

La cosa es que al ser variable la fuerza que actúa sobre el cuerpo... <u>TAMBIÉN</u> <u>LO</u> <u>SERÁ</u> <u>SU</u> <u>ACELERACIÓN</u>!. (Atento!)

Es decir, yo tengo esto:



← CUERPO SOBRE EL QUE ACTÚA UNA FUERZA VARIABLE

La Fuerza es m.a según la ley de Newton. Entonces:

$$\overset{-Kx}{F} = m.a \Rightarrow -K.x = m.a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \ominus \frac{K}{m}.x}$$

← ACELERACIÓN QUE TIENE UN CUERPO ATADO A UN RESORTE

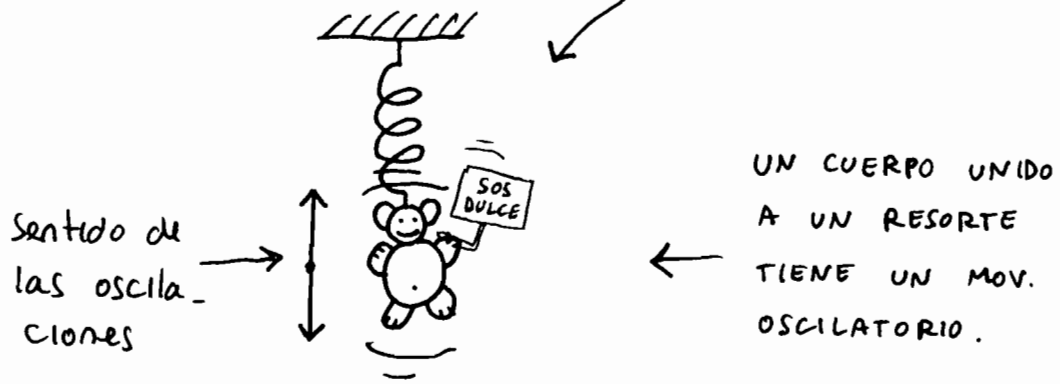
K es una constante. m es una constante. De manera que el choclazo ⊖ Ka sobre eme es constante. Quedaría $a = \ominus cte.x$. Por lo tanto:

A esto quería llegar →

LA ACELERACIÓN QUE TIENE UN CUERPO QUE ESTÁ UNIDO A UN RESORTE ES VARIABLE CON LA POSICIÓN. MAS EXÁCTAMENTE, ES PROPORCIONAL A LA ELONGACIÓN Y DE SENTIDO CONTRARIO.

LEER

A ver si nos entendemos. Supongamos un cuerpo atado a un resorte. Por ejemplo, este



El cuerpo sube y baja en un extraño movimiento al que ellos llaman <u>OSCILATORIO</u>.

¿Es este movimiento un MRU?

<u>RTA</u>: NOOOOO!. En un MRU la aceleración es <u>CERO</u>.

¿Es este movimiento un MRUV?

<u>RTA</u>: NOOOOOO!. En un MRUV la aceleración es <u>CONSTANTE</u>.

Entonces, ¿qué tenemos acá?. Tenemos un nuevo movimiento que tiene la característica de que su aceleración es ⊖ constante por x, es decir, repito, proporcional a la elongación pero de sentido contrario.

¿Y por qué hago tanto incapié en esto de $a = -cte.x$?

<u>RTA</u>: Porque justamente el movimiento de una masa colgada de un resorte es armónico y la cuestión de que $a = \ominus cte\ x$ <u>ES LA CARACTERÍSTICA FUNDAMENTAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO</u>. (Esto <u>SI</u> tenés que saberlo).

FIN REPASO

MOVIMIENTO ARMÓNICO (Acá empieza la teoría)

El movimiento armónico es un movimiento que va y viene en donde la posición, velocidad y aceleración de lo que se mueve varían sinusoidalmente con el tiempo. Como a las funciones seno y coseno se las llama armónicas (no se porqué), al movimiento se lo llama armónico.

¿De dónde viene esto de que la posición, la velocidad y la aceleración dependen del tiempo en forma senoidal? Lo vemos enseguida.

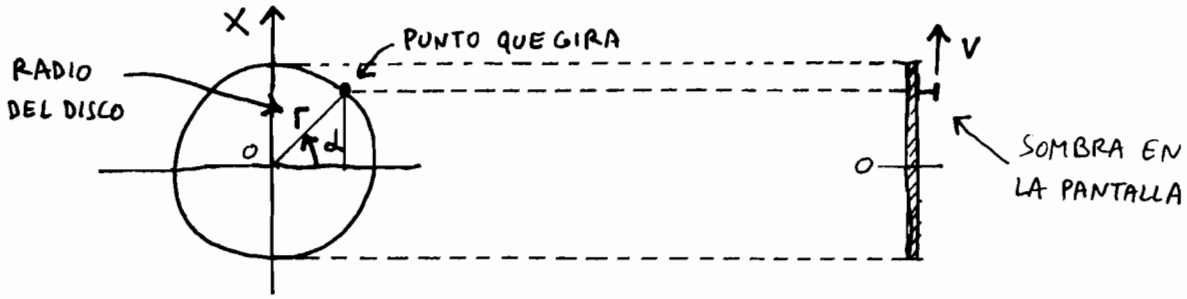
Supongamos un disco que gira que tiene un clavo pegado. Pongo un proyector de diapositivas y miro lo que hace la sombra del clavo:

¿Qué veo?. Veo que la sombra del clavo sube y baja en un movimiento alternativo. (Alternativo = que va y viene). Pués bien, ese movimiento de vaiven, alternativo, de ida y vuelta, oscilante, vibratorio o como lo quieras llamar, es el que queremos estudiar.

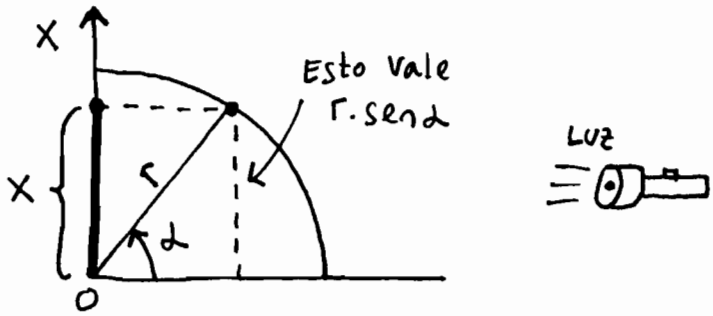
(Aclaración: estudiar un movimiento significa hallar posición, velocidad y aceleración en función del tiempo).

POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO EN EL MOV. ARMÓNICO

Hagamos un dibujito que represente lo que está pasando:



La sombra va subiendo y bajando y su posición oscila alrededor del punto O. Si el disco giró un ángulo α, la separación de la sombra de la posición de equilibrio vale r. sen α. Fijate:

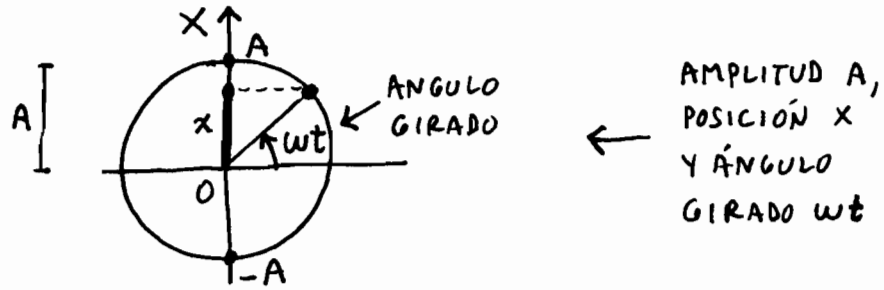


Es decir, lo que hago todo el tiempo es $\boxed{\text{PROYECTAR}}$ el mov. circular sobre un eje vertical. No analizo lo que hace el movimiento circular. Analizo lo que hace $\boxed{\text{LA SOMBRA}}$ del movimiento circular. Por eso ellos dicen que el movimiento armónico es la proyección de un mov. circular sobre un eje.

Ahora analicemos esto: ¿Cuál es la máxima separación que puede tener la sombra de la posición de equilibrio?

Bueno, esa separación se produce cuando la sombra está

arriba de todo, es decir, cuando el ángulo vale 90°. El valor de esa distancia vale r. sen 90°, o sea r.
Pero en un movimiento que sube y baja no hay radio. Hay una distancia que es la máxima separación de la posición de equilibrio, así que a esa distancia la vamos a llamar A, de amplitud. Por otro lado, el ángulo girado vale la velocidad angular por el tiempo. Entonces la fórmula que puse como $x = r \operatorname{sen} \alpha$ queda como $x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$.



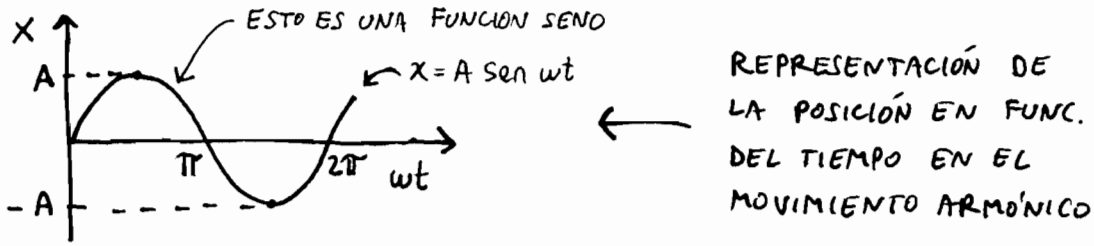
En definitiva (y a esto es a lo que quería llegar), la posición en un movimiento armónico varía sinusoidalmente con el tiempo y está dada por la ecuación:

$$\boxed{x = A \operatorname{sen} \omega t}$$

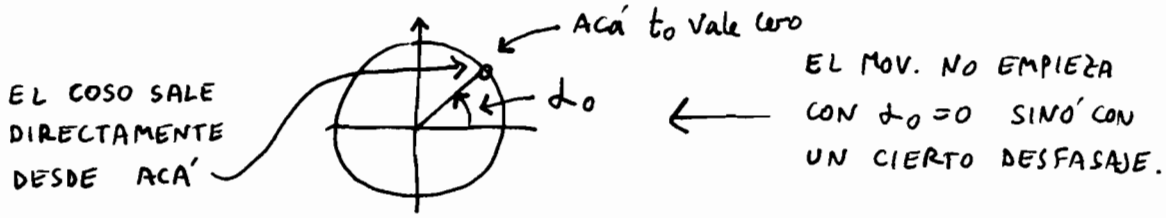
POSICIÓN EN EL MOV. ARMÓNICO

POSICIÓN — AMPLITUD — VELOCIDAD ANGULAR — TIEMPO TRANSCURRIDO

Esta ecuación me va dando las distintas posiciones que tiene la partícula en función del tiempo. Grafiquemos:



Ahora, puede pasar que al empezar el movimiento el ángulo inicial no sea cero sinó que sea una cosa así:

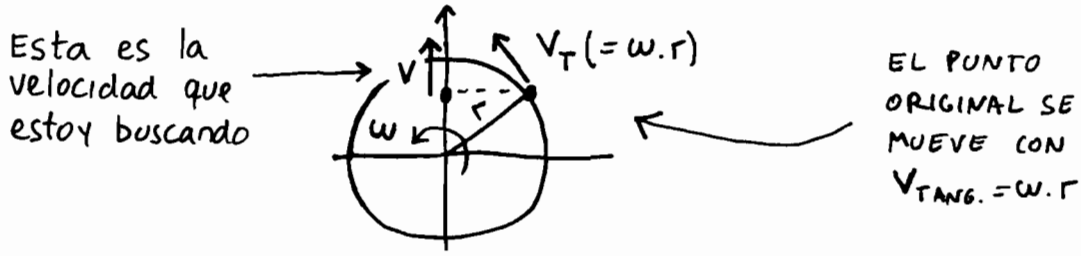


Bien, a este ángulo inicial de desfasaje se lo llama <u>FASE INICIAL</u> y se lo suele poner como Fi cero, delta cero o alfa cero. En ese caso, la ecuación hiper completa para la posición en el movimiento armónico queda como $X = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$.

Esto es todo con respecto a la posición en el movimiento armónico. Vamos ahora al cálculo de la velocidad.

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO

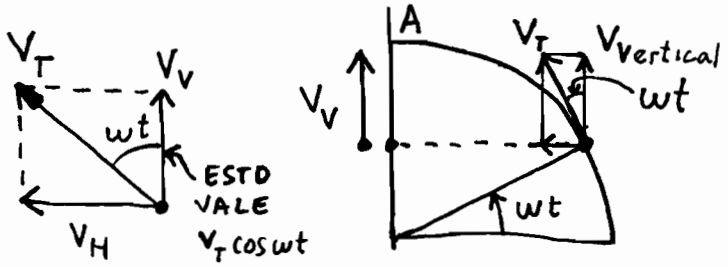
El punto original se mueve dando vueltas por la circunferencia. Buscamos la velocidad con la que sube y baja su sombra por el eje vertical. Hago este dibujo:



Al ser un movimiento circular, la velocidad del punto es la tangencial que vale omega por erre.

Bien. Ahora para hallar la velocidad vertical de la sombra del punto sobre el eje tengo que hacer una proyección.

La velocidad tangencial se puede descomponer en una vertical y otra horizontal. Ampliemos un poco:



← DESCOMPOSICIÓN DE LA VELOCIDAD TANGENCIAL EN 2 DIRECCIONES

Lo que hice en el dibujo fue tomar las componentes de la velocidad. Si te fijás bien vas a ver que todos los ángulos que marqué como ωt valen efectivamente ωt. En ese caso la componente vertical de la velocidad vale V_T por coseno de ωt. Pero V_T es ωr que es lo mismo que ωA. Entonces:

$$V_{VERT} = V_{TANG} \cdot \cos(\text{Angulo girado})$$

$$\Rightarrow V_V = \omega . \overset{A}{r} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{V = A . \omega \cos \omega t}$$

← VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO

VELOCIDAD DEL PUNTO QUE SE MUEVE CON MOVIMIENTO ARMONICO

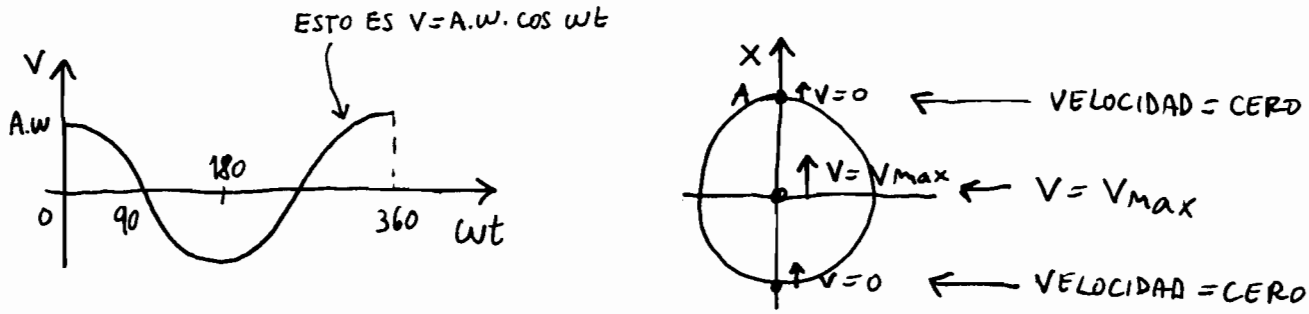
AMPLITUD (= radio)

VELOCIDAD ANGULAR DEL PUNTO QUE SE MUEVE SOBRE LA CIRCUNF. BASE.

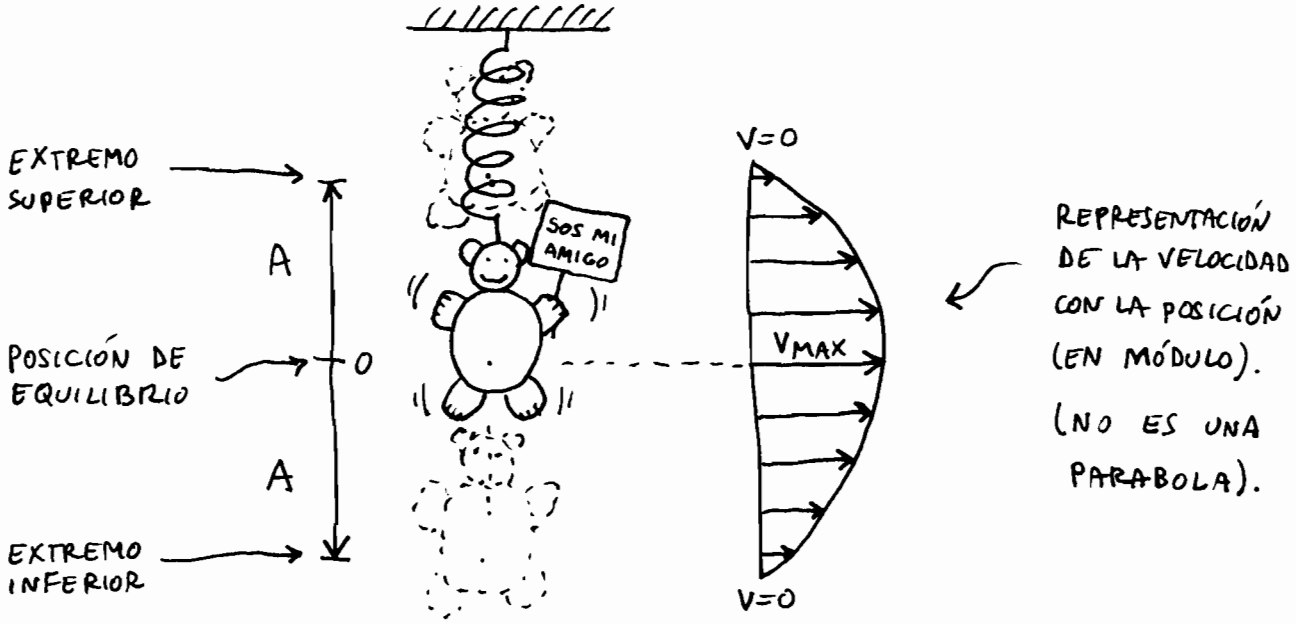
Esta velocidad también se podría haber obtenido derivando la posición respecto del tiempo ($V = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A \operatorname{sen} \omega t) = A \omega \cos \omega t$). A veces ellos lo dan así. Es cierto que es más rápida la deducción pero para mi gusto se pierde el concepto.

Analicemos un poco esta velocidad que obtuvimos.

Al ser la velocidad $A\omega \cos \omega t$, será máxima cuando $\cos \omega t$ sea 1, es decir, $\omega t = 0°$. Eso pasa cuando el punto pasa justo por el origen de coordenadas. De la misma manera $\underline{v}$ será mínima (cero) cuando $\cos \omega t$ sea cero, es decir, $\omega t = 90°$. Esto pasa cuando el punto está arriba de todo.

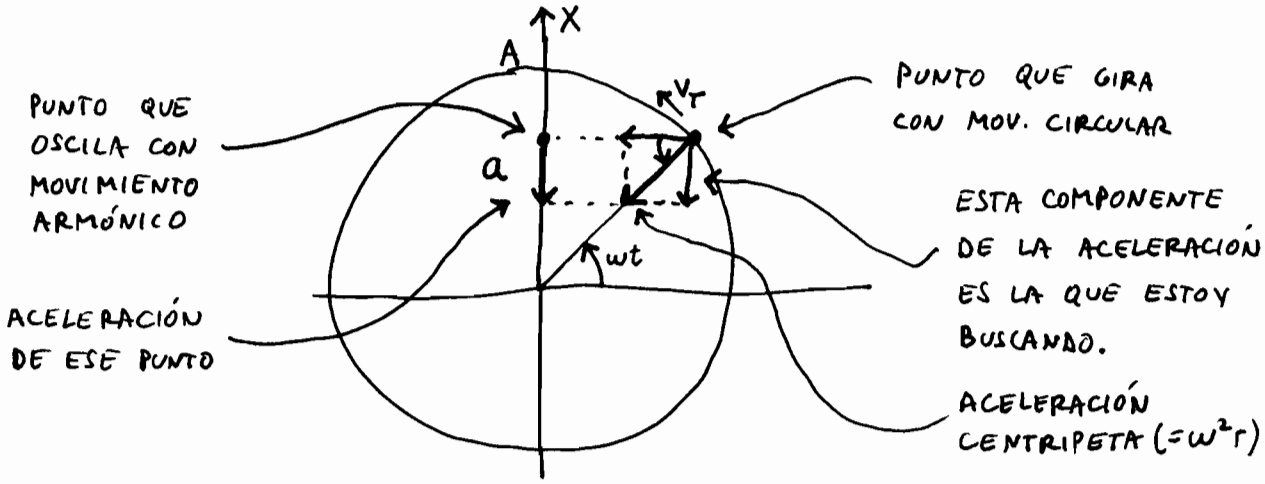


Es decir, el punto pasa rápido por el medio y se va frenando a medida que llega muy arriba o muy abajo. Podés comprobar esto poniendo a oscilar un resorte. Vas a ver que al pasar por la posición de equilibrio la velocidad es máxima y al llegar a las puntas la velocidad es cero.

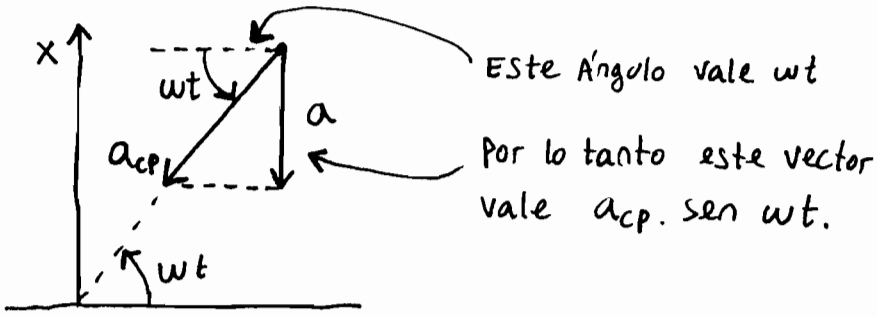


ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO

Vamos a ver ahora que pasa con la aceleración. Cuando una cosa se mueve con movimiento circular tiene una aceleración centrípeta que vale $\omega^2 r$. Otra vez, lo que busco es la proyección de esa aceleración sobre el eje vertical.



Ahora dibujemos el triangulito con mayor detalle y fijémosnos qué ángulo es qué ángulo:



La aceleración del punto que oscila será $a = a_{cp} \cdot \text{sen}\, \omega t = \omega^2 r \,\text{sen}\, \omega t = A\omega^2 \,\text{sen}\, \omega t$. (otra vez tomé r como A). Pero en esta deducción falta tomar en cuenta el signo. La cuestión es que el eje X apunta para ↑ allá y el vector aceleración va justo al revés (↓).

quiere decir que el vector aceleración siempre va a tener sentido contrario al vector posición. Entonces la fórmula no será $A\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$ sinó $\boxed{\text{MENOS}}$ $A\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$. Queda:

Esto

$$\boxed{a = \ominus A\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t} \leftarrow \text{ACELERACIÓN EN EL MOV. ARMÓNICO}$$

Y repito. Lo que el signo menos indica acá es que el vector aceleración va siempre al revés del vector posición. Cuando el cuerpo está arriba (posición así $\uparrow x$), la aceleración va para abajo (es decir, así $\downarrow a$). Y viceversa.

Al igual que antes, la aceleración se podría haber obtenido como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\left(V = A\,\omega \cdot \cos \omega t \Rightarrow a = \frac{d}{dt}\left(A\,\omega \cos \omega t\right) = A\,\omega \frac{d}{dt}\left(\cos \omega t\right) = \right.$$
$$\left. = A \cdot \omega\,(-\operatorname{sen} \omega t) \cdot \omega = -A\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\right).$$

Otra vez. Al derivar uno gana rapidez y elegancia pero pierde claridad y comprensión de lo que está pasando.

Esto lo vas a ver muchas veces en la Facultad (y no sólo en Física). Ellos hacen las cosas de la manera más elegante posible aunque eso haga que el tema resulte incomprensible.
(si o no?).

Pero hay cosas peores.

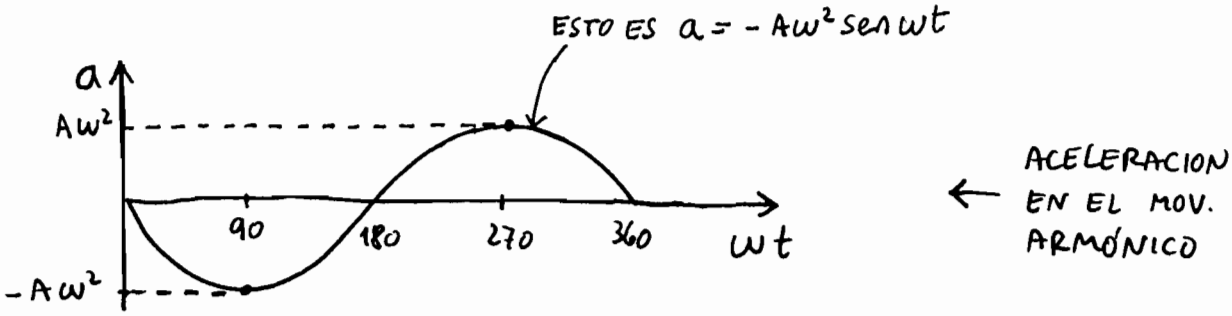
Vamos, que ya terminás con la teoría.

Veamos ahora como varía la aceleración en función del tiempo haciendo un graficuito.

Tenemos que la aceleración va a ser máxima cuando Sen ωt sea 1, es decir, para $\omega t = 90°$ o $270°$. (-1).

La aceleración será mínima (cero) cuando sen ωt sea cero, es decir, $\omega t = 0$ u $\omega t = 180°$.

Resumiendo, el valor de la aceleración en módulo será máximo arriba de todo o abajo de todo y cero al pasar por la posición de equilibrio. Represento y me queda así:



Falta ahora que veas sólo una cosa. Tenemos como varía la aceleración con el tiempo. Tratemos de buscar como varía la aceleración con la posición.

Las ecuaciones del movimiento armónico resultaron ser:

$$\begin{cases} X = A \operatorname{sen} \omega t & \leftarrow \text{POSICIÓN (Elongación)} \\ V = A\omega \cos \omega t & \leftarrow \text{VELOCIDAD} \\ a = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t & \leftarrow \text{ACELERACIÓN} \end{cases}$$

Ahora, si te fijás en la 3ra ecuación verás que tengo esto

$$a = -A\omega^2 \overbrace{\operatorname{sen} \omega t}^{X}$$

VER

ACELERACIÓN EN EL MOV. ARMÓNICO EN FUNC. DE LA POSICIÓN

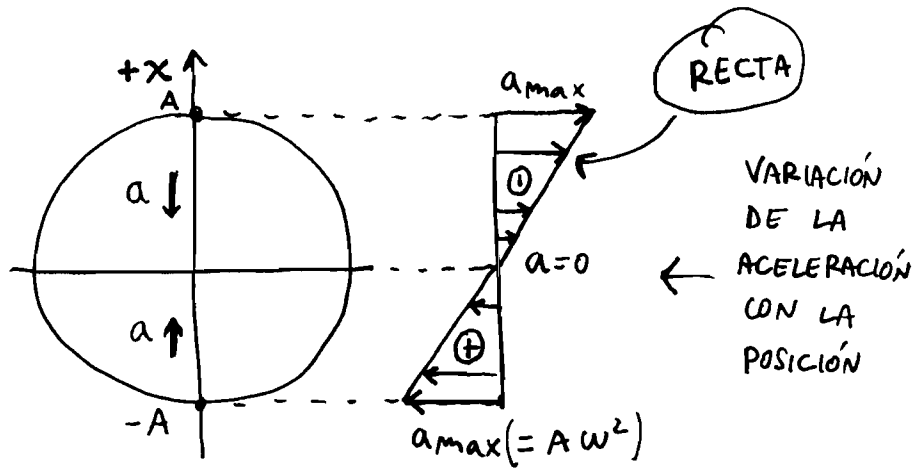
reemplazando: $\boxed{a = \ominus \omega^2 X}$

La velocidad angular es constante, quiere decir que el término $-\omega^2$ también es constante. En consecuencia, la ecuación $a=-\omega^2 x$ me está indicando que la aceleración en el movimiento armónico varía $\boxed{\text{LINEALMENTE}}$ con la distancia a la posición de equilibrio. Es más, es proporcional a la distancia a la posición de equilibrio y de sentido contrario.

¿me seguiste?.

Esto es importante porque es justo la base del asunto. Fíjate:

$$\boxed{a=-\omega^2 x}$$



La idea es que partiendo de proyectar un movimiento circular sobre un eje se obtiene un movimiento en donde la posición, la velocidad y la aceleración varían armónicamente (= sinusoidalmente) con el tiempo y que tiene como característica fundamental que la aceleración es proporcional a la separación de la posición de equilibrio y de sentido contrario.

Ahí está. Aceleración proporcional a estiramiento.

Ese es el concepto que quería que vieras y es el que ellos te van a pedir que sepas.

Esto es desde el punto de vista cinemático, pero se puede ver también desde el punto de vista dinámico. Es decir, habíamos calculado la aceleración. Pero fuerza es igual a masa por aceleración. Quiere decir que si la aceleración es proporcional a la separación, la fuerza también lo será.

Entonces otra manera de definir un mov. armónico es decir que es aquel movimiento en donde la fuerza que actúa apunta siempre hacia el centro y su valor es proporcional a la distancia a la posición de equilibrio.

signo menos. (ojo).

$$\boxed{F = \ominus cte \cdot x}$$

ECUACION HIPER-FUNDAMENTAL DE CUALQUIER COSA QUE SE MUEVA CON UN MOVIMIENTO ARMÓNICO.

FUERZA SOBRE EL CUERPO.

CONSTANTE QUE NO DEPENDE NI DE F NI DE x.

DISTANCIA A LA POSICION DE EQUILIBRIO.

Entonces tenemos un cuerpo tal que que si uno lo deja en la posición de equilibrio se queda quieto y no se mueve. Pero apenas uno lo separa del equilibrio, aparece una fuerza que lo trata de llevar de nuevo al medio.

A esta fuerza se la suele llamar <u>RESTITUTIVA</u> porque trata de volver al cuerpo a su posición original.

Y ahora vamos a la confirmación de lo que estabas sospechando...

¿Qué fuerza conocés que tire siempre hacia el centro con un valor proporcional a la separación?

¿Qué fuerza sigue la ecuación ⊖ constante por equis?

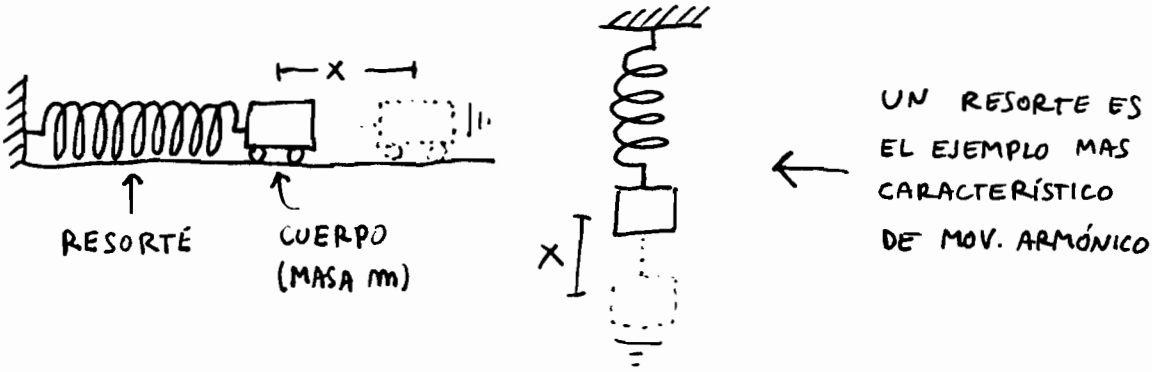
¿Qué fuerza es la fuerza restitutiva por excelencia?

ES...

¡LA FUERZA DE UN RESORTE!

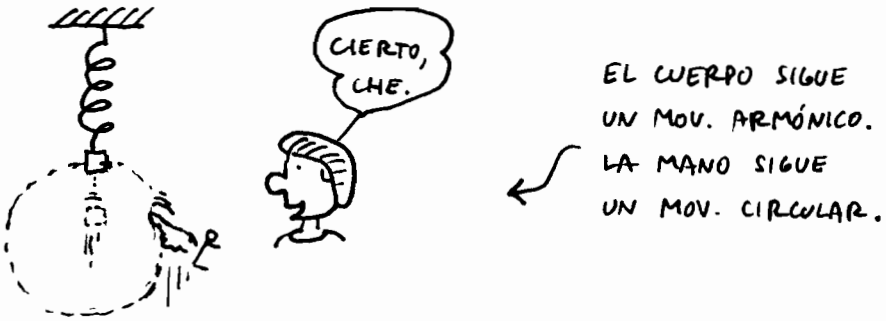
Sí. Las fuerzas que ejercen los resortes están dadas por la ley de Hooke que dice $F = -KX$.

Cualquier cosa que oscile atada a un resorte tendrá un mov. armónico.



Podés comprobar esto colgando un cuerpo de un resorte y poniéndolo a oscilar.

Si vas siguiendo el movimiento del cuerpo trazando círculos con la mano, vas a ver que tu dedo sigue aproximadamente un movimiento circular uniforme.



No hace falta que me creas. Podés agarrar un resorte y verificarlo.

¿Algo más sobre movimiento armónico? Sí. Un último comentario.

Hooke demostró este asunto de $F = K.X$ en 1676. (Hooke era contemporaneo de Newton y enemigo de él). El tipo se puso tan contento cuando descubrió esto que lo escribio en Forma de anagrama. (Anagrama = cambiar las letras de lugar).

Lo que él escribió fue CEIIINOSSSTTUV. Esto es lo que se conoce como el anagrama de Hooke y corresponde a la Frase en latín UT TENSIO SIC VIS. (A tal alargamiento, tal Fuerza).

La cosa es que alguien lo vió escrito y le dijo:

-Oiga Don, ¿Que significa esto de CEINOSTUV?

- Ah, ja, ja!. Esperaba esa pregunta, mi amigo. Es un anagrama que escribí.

- Y que dice?

- Bueno, tiene una ley Física oculta.

- ¿Qué ley?

- La que expresa que en un resorte el alargamiento es proporcional a la Fuerza aplicada.

(Y ahí se Fué el otro tipo a contarle a todo el mundo la ley que había descubierto).

Ahora yo pregunto: Si escribiste un anagrama...
¿Para qué después lo das a conocer a todo el mundo?

$\boxed{\text{¡GIL!}}$.

FIN DE LA TEORÍA DE MOVIMIENTO ARMÓNICO.

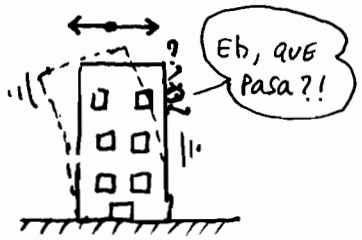
EJEMPLOS DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS

Todo este asunto del movimiento armónico salió de proyectar un movimiento circular sobre un eje. PEro... ¿Por qué esa ocurrencia de proyectar un movimiento circular y no uno elíptico, parabólico, helicoidal o lo que sea?!

Bueno, porque justamente ellos comprobaron que este tipo de movimiento aparece muy seguido en la naturaleza y en especial en la ingeniería.

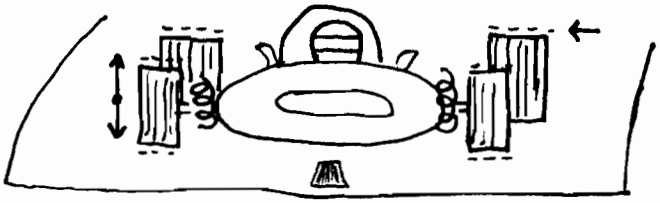
Muchísimas cosas que se mueven lo hacen siguiendo un movimiento armónico. Fijate:

EL MOVIMIENTO DE LAS ALAS DE LOS AVIONES.



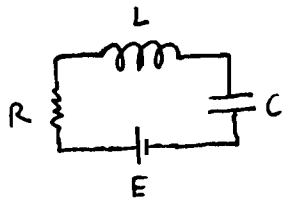
LA VIBRACIÓN DE LOS EDIFICIOS EN LOS TERREMOTOS, O DESPUÉS DE QUE FUERON GOLPEADOS POR UNA FUERTE RÁFAGA DE VIENTO

La Tierra misma vibra armónicamente con los temblores. La vibración en el suelo que uno siente cuando pasa el subte es un movimiento armónico. (El subte, un tren, un camión, lo que sea).

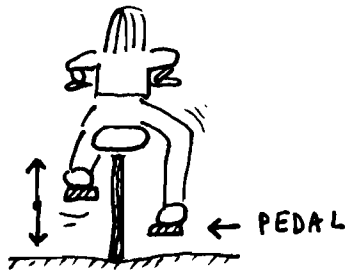


TAMBIÉN EL MOVIMIENTO DE LA SUSPENSIÓN DE LOS AUTOS ES ARMÓNICO.

En el caso de los autos el movimiento es en realidad armónico amortiguado justamente por la acción de los amortiguadores. (Amortiguado significa que se va frenando).
Y hay más ejemplos:

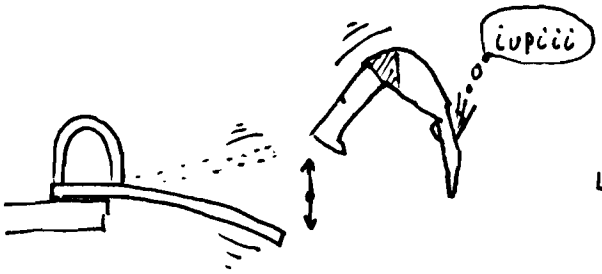


LOS CIRCUITOS OSCILANTES DE LA ELECTRÓNICA.

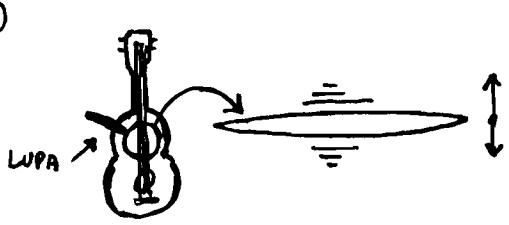


EL MOVIMIENTO APARENTE DE LOS PEDALES DE UNA BICICLETA

La generación y la transmisión de la electricidad suele hacerse con corriente alterna. Alterna significa que la tensión y la corriente varían en forma sinusoidal con el tiempo.
Y si bien no hay algo "concreto" que se mueva con mov. armónico, si varían armónicamente la tensión y la intensidad.



LA TABLA DE UN TRAMPOLÍN



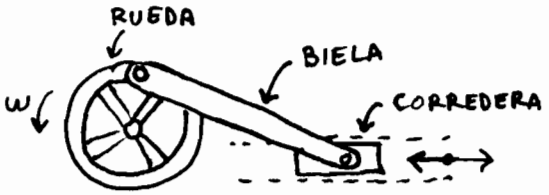
LA CUERDA DE UNA GUITARRA.

La tabla de un trampolín y la cuerda de una guitarra dejan de vibrar después de un rato y su movimiento es amortiguado.
Hay muchas más cosas que vibran con movimiento armónico: Los bordes de un diapasón, los instrumentos musicales cuando suenan.

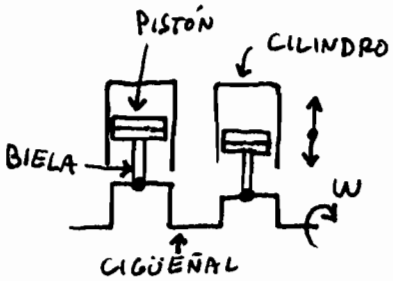
Los parlantes de un equipo, los vidrios cuando hay un ruido fuerte. Los puentes o las autopistas cuando pasan los camiones... En general toda cosa que vibra lo hace con movimiento armónico.

Prendé el auto y poné la mano sobre el capot. verás que vibra. Levantá el capot y mirá el motor. Vibra. Estos son movimientos armónicos.

Muchas máquinas tienen piezas que suben y que bajan o que van para adelante y para atrás con movimiento alternativo. La gran mayoría de estos movimientos es armónico. Y si no es armónico es muy parecido. Acá hay ejemplos:

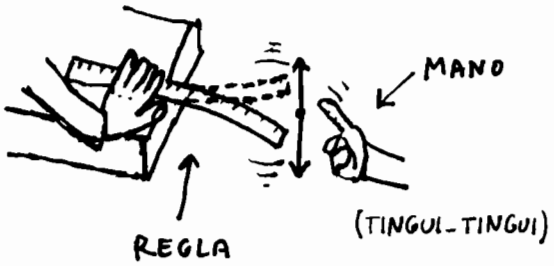


EL MOVIMIENTO DE LA CORREDERA EN LOS SISTEMAS BIELA-MANIVELA ES CASI ARMÓNICO (COMO EN LAS VIEJAS LOCOMOTORAS A VAPOR).



EL MOVIMIENTO DE LOS PISTONES DE LOS MOTORES ES PRÁCTICAMENTE ARMÓNICO.

Y si querés ver un movimiento armónico ya mismo podés apoyar una regla contra la mesa, tenerla apretada con una mano mientras que con la otra le hacés tingui-tingui.



← LA REGLA VIBRANDO ES UN EJEMPLO DE MOVIMIENTO ARMÓNICO

Así como ves, muchos movimientos de la vida real son armónicos. Sin embargo los chicos dicen: Muy bien, ya lo entendí. Muchas cosas se mueven con movimiento armónico. Está bien. Pero ¿qué gano yo con saber que la amplitud de las oscilaciones varía como A por seno de omega te? ¿Qué utilidad puede tener eso?

Bueno, es cierto. La amplitud de las oscilaciones no es del todo importante. Tampoco es importante saber que la velocidad varía como A por ω por coseno de ωt...

Entonces ¿qué es lo importante?

Lo importante es la **ACELERACIÓN**.

Claro, fijate. Sabemos que la aceleración de algo que se mueve con movimiento armónico <u>NO</u> permanece constante sinó que aumenta y disminuye variando sinusoidalmente con el tiempo.

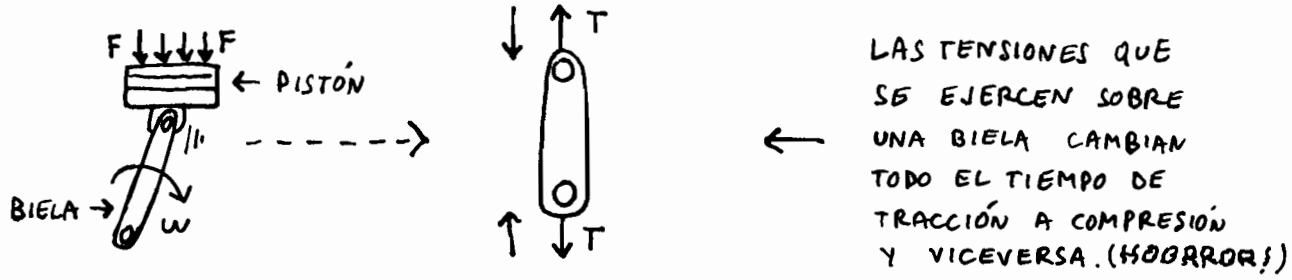
¿Y eso que significa?

Bueno, $F = m.a$, quiere decir que la **FUERZA** que actúa también varía con el tiempo de la misma manera.

Entonces necesitamos conocer las aceleraciones que actúan para poder calcular las fuerzas que se ejercen.

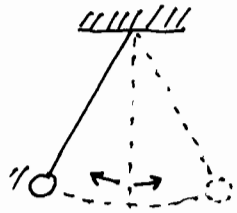
Y lo importante acá es entender que esas fuerzas no tienen porqué ser chiquitas. ¡Al revés!. ¡Pueden ser **ENORMES!**.

No me refiero a ositos de juguete colgados de resortes...
Imaginate hélices..., motores de máquinas, rotores de centrales hidroeléctricas, paletas de turbinas o más simplemente, de los pistones de un motor de un auto cualquiera.
Un motor puede girar a unas 3000 vueltas por minuto, de manera que los pistones están sometidos fácil a aceleraciones que son del orden de 1000 veces la gravedad.
Las fuerzas que se generan son GIGANTESCAS. Y lo que es peor, cambian todo el tiempo de signo. (Es decir, en un momento son de tracción y después son de compresión).



Este asunto de someter a las piezas a tensiones alternativas las DESPEDAZA. Es lo que en estabilidad llaman fatiga. Es el mismo efecto que permite romper un alambre doblándolo para un lado y para el otro. (Lo vas a ver en Estabilidad II o III).
La magnitud de estas fuerzas es necesario conocer para poder diseñar las dimensiones de las piezas.
Esa es la cuestión.
¿Ves como es la cosa?

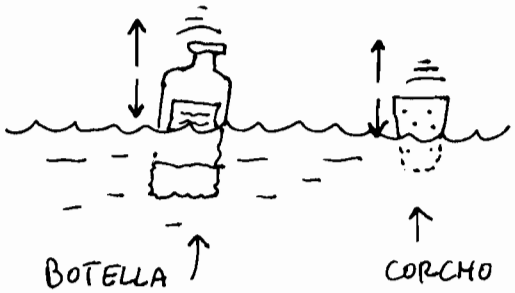
Y si me permitís ahora, dejame que te de otros ejemplos de movimientos armónicos. El ejemplo hiper-clasico, repito, es el de un cuerpo atado a un resorte que sube y baja. El otro ejemplo que ellos suelen dar es el de un péndulo. Un péndulo que oscila tiene un movimiento armónico.



← UN PÉNDULO OSCILANDO TIENE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO. (BUENO, CASI ARMÓNICO, DIGAMOS).

La demostración de porqué esto es así está en los libros y seguramente ellos la van a hacer en el pizarrón. El movimiento es <u>casi</u> armónico porque en realidad no es en linea recta sinó que está sobre un arco de circunferencia. Cuanto más chicas son las oscilaciones, más se aproxima el movimiento a uno armónico simple.

También es armónico el movimiento de algo que flota en el agua. Puede ser un corcho, un telgopor o una botella de coca. Es decir, él está flotando y vos lo hundís y lo soltás. El movimiento que sigue es armónico.



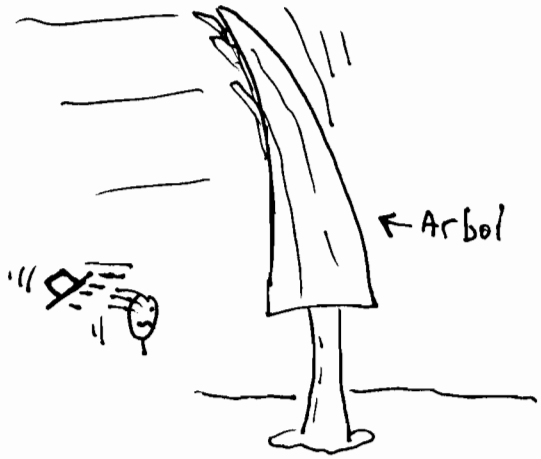
← EL MOVIMIENTO DE LAS COSAS QUE SUBEN Y BAJAN EN EL AGUA ES ARMÓNICO.

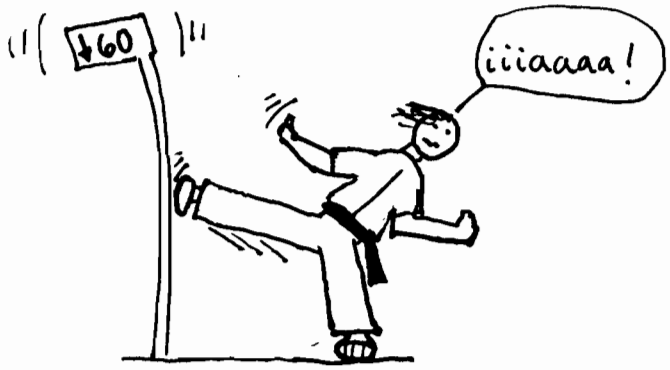
En 1969 cuando los norteamericanos llegaron a la luna, uno de los instrumentos que colocaron fue una especie de sismógrafo para medir vibraciones. Cuando se fueron, dejaron caer el módulo lunar para probar si el aparato funcionaba.

¿Que si el aparato funcionaba?

¡Y como!.. ¡La Luna quedó vibrando varios días como si fuera una campana!. (Ese movimiento era armónico, por supuesto).

Pegale a la baranda del balcón. Fijate que queda vibrando. (Animate).
Dale una patada a una parada de colectivo. Vibra.
Mirá los árboles. Fijate como se balancean cuando les llega una ráfaga de viento. Y las ramas. Mirá las ramas como se mueven.
¿Tenés lavarropas en tu casa?. Fijate lo que pasa cuando centrifuga.
¿Escuchaste alguna vez una gran explosión?. ¿Observaste como tembló toda la casa?. (¿Y los vidrios?. ¿viste lo que pasó con los vidrios?).



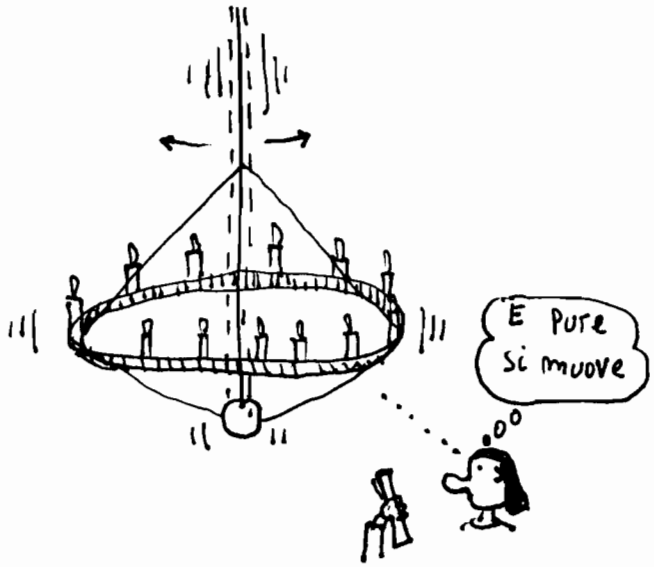


Andá a una catedral o a una iglesia. Prestale atención a las grandes lámparas que cuelgan del techo. Vas a ver que tienen un ligero balanceo. En realidad son inmensos péndulos. Midiendo el período podrías saber la longitud del hilo. (o sea, la altura del techo). Galileo descubrió las leyes del péndulo mirando una de estas lámparas. (Podés verla en la catedral de Pisa, cerca de la torre inclinada. Todavía está).

Y siguiendo con las lámparas, te propongo lo siguiente: Mirá para arriba. ¿Ves la lámpara que cuelga del techo en la habitación donde estás?. Bueno. Subite a un banquito y hacela girar unos 30°. Ahora soltala. ¿Ves lo que pasa?. La cosa empieza a girar para un lado y para el otro. Esto es lo que se llama péndulo de torsión. (Hay varios en el laboratorio).

Uno de estos péndulos de torsión es el que usó Cavendish para medir la constante de gravitación universal.

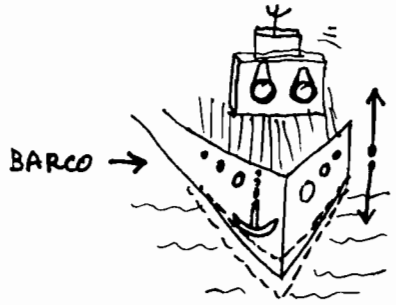
Si pensás un poco te vas a dar cuenta que este movimiento también es armónico simple. (Atención, ahora acá lo que varía sinusoidalmente es la posición angular, es decir, el ángulo de giro).



LA LAMPARA DE GALILEO Y EL PENDULO DE TORSION.

...y todavía hay más ejemplos...

También es armónico el cabeceo de la proa de los barcos...

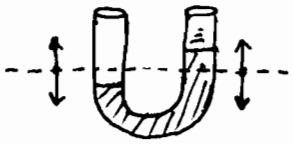


← EL MOVIMIENTO DE SUBIDA Y DE BAJADA DE LA PROA ES UN MOVIMIENTO ARMÓNICO

También es armónico el movimiento de subida y de bajada que tiene algo que está flotando cuando pasa una ola:

← EL CORCHO SUBE Y BAJA CUANDO PASA UNA OLA.

Siguiendo con los líquidos, también es armónico el movimiento de un líquido que oscila en un tubo en U.



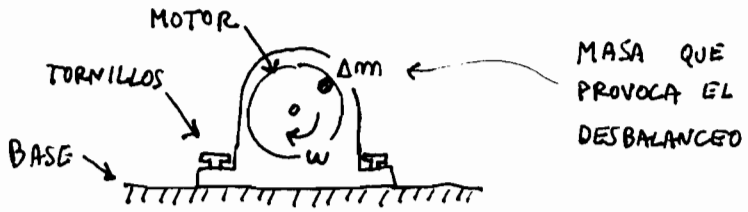
← MOVIMIENTO DEL MERCURIO EN UN TUBO EN U.

Andá a una fabrica y fijate los motores que mueven las máquinas. vibran. O más fácil: Andá a la cocina y prendé la batidora. ¿vibra o no vibra?.

Eso pasa porque la masa que gira no está uniformemente distribuida alrededor del eje de rotación. Lo mismo pasa con las ruedas de los autos. Fijate que a veces el volante vibra. Eso pasa porque en la rueda la cubierta o el disco de freno se gastaron en forma despareja.

Ahora la rueda está girando alrededor de su centro geométrico y no de su centro de masa. Eso provoca las vibraciones. (Hay que balancear). Se puede demostrar que estas vibraciones son armónicas.

Ellos suelen simbolizar un motor desbalanceado así:



Si las vibraciones son muy grandes, las fuerzas pueden ser muy grandes. Pueden romperse los tornillos de la base. Puede romperse el eje. En mecánica vas a ver como se calcula el valor de estas fuerzas. En estabilidad III y en elementos de máquinas vas a ver como se hace para diseñar las piezas para que aguanten estas tensiones.

Acá en física lo que ellos quieren es que tengas una idea de lo que es el movimiento armónico y que maneses las ecuaciones. Que sepas que la posición, la velocidad y la aceleración varían así ~ con el tiempo y que la aceleración (y la fuerza) apuntan todo el tiempo hacia el centro y que son proporcionales al estiramiento y de sentido contrario.

Ahí está. Con que sepas eso, alcanza.

Con respecto al parcial siento comunicarte que NO te van a tomar problemas de movimiento armónico.

(¡Y ahora me lo dice?!).

Sí, no te enojes, pero tenía que decírtelo. La cosa es así: Vos tenés que saber movimiento armónico por la simple razón de que este tema es la puerta de entrada a otro tema bien peludo que es...

¿Cuál es?!

Por supuesto, ondas.

Una onda es un movimiento armónico que avanza. Es decir, es la composición de un movimiento vibratorio así ↕ con un MRU así →.

Ellos no te van a tomar problemas de movimiento armónico. Te van a tomar ondas.

Por eso necesitan que manejes los conceptos y las ecuaciones del movimiento armónico.

Yo agarré por otro lado. Puse muchos ejemplos de situaciones donde aparecen movimientos oscilatorios. Ejemplos de la vida diaria y de la ingeniería. La idea es que vieras la cantidad de veces que aparecen estos movimientos y que te des cuenta de una cosa:

Hermano, la ingeniería es lo más.

Si lograste captar esta idea, no vas a tener problema para ponerte las pilas, enfrentar los problemas que siguen y prepararte para entrar en el verdadero tema gordo que es ondas. (Y que es lo que te van a tomar).

FIN TEORIA DE MOVIMIENTO ARMÓNICO.
AHORA VIENEN LOS PROBLEMAS RESUELTOS

Los enunciados que pongo acá están sacados de unas guias viejas que encontré por ahí.

PROBLEMAS DE MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE. **(M.A.S.)**

1 - Una partícula con movimiento armónico simple está en reposo a una distancia de 6 cm de su posición de equilibrio en t = 0. Su período es de 2 seg.

a)-Escribir las expresiones correspondientes a x = f (t), v = f (t) y a = f (t).

b)-¿Cuál es el valor máximo para x, v y a ?

c)- ¿ Cuál es el primer instante despues de t = 0 en el cual se presenta este valor máximo ?

Rta: 1 seg ; 0,5 seg.

a)- Recordemos las ecuaciones que definen la posición, velocidad y aceleración para una cosa que se mueve con movimiento armonico:

$$\begin{cases} x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \\ v = A.\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a = \ominus A \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

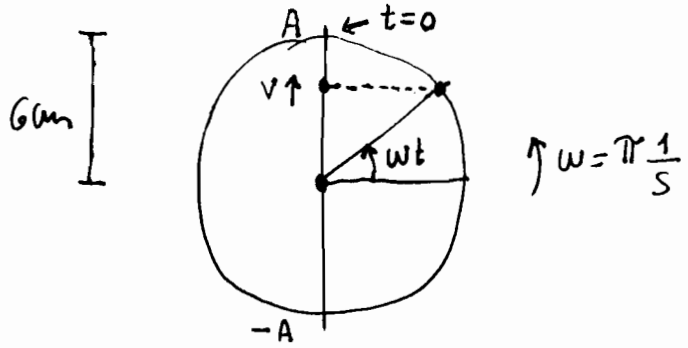
← ECUACIONES QUE DESCRIBEN UN MOVIMIENTO ARMÓNICO

Por favor acordate que en estas expresiones $\underline{A}$ es la amplitud, $\underline{\omega}$ es la velocidad angular asociada al movimiento armónico, t es el tiempo transcurrido y Fi cero es la Fase inicial.

Me dicen que a 6 cm de la posición de equilibrio está en reposo.

Quiere decir que $\boxed{A = 6\ cm}$

Si el período es 2 segundos, planteo $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,s} \Rightarrow \boxed{\omega = \pi \frac{1}{s}}$



Fijate que según el dibujo en t=0 el punto está en X = A. $\Rightarrow \boxed{\varphi_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}}$

Las ecuaciones van a quedar:

$$\begin{cases} x = 6 \operatorname{sen}(\pi t + \pi/2) \\ v = 6\pi \cos(\pi t + \pi/2) \\ a = \ominus 6 \pi^2 \operatorname{sen}(\pi t + \pi/2) \end{cases} \longleftarrow$$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PEDIDO (x en cm y t en seg)

Dando valores a t podría sacar la posición velocidad y aceleración en ese instante.

b)_ Piden los valores máximos de x, v y a. Bueno, el valor máximo de x tendría que ser 6 cm, que es la amplitud. (6 o −6, digamos).

Veamos si da. Para que la ecuación $x = 6 \operatorname{sen}(\pi t + \pi/2)$ tome su valor máximo, seno del choclazo tendría que ser 1. En ese caso me queda efectivamente $x_{max} = 6(1) = 6$ cm. (Dió).

El otro valor máximo que puede tomar el seno es $\ominus 1$ y en ese caso tendría la otra respuesta, $x_{max} = -6$ cm.

¿Cuándo ocurre esto?.

<u>RTA</u>: Cuando sen(choclo) = 1, o sea, choclo $= \frac{\pi}{2}$ (90°). Escribamoslo:

$$\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \overbrace{\frac{\pi}{2}}^{90^\circ} \Rightarrow \pi t = 0 \Rightarrow \underline{t = 0}$$

t=0 es justo cuando el coso pasa por la posición superior. Después de este instante, la posición volverá a ser máxima cuando sen(choclo) = $\ominus 1$.

O sea:

$$\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \overbrace{\frac{3}{2}\pi}^{270^\circ} \Rightarrow \pi t = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 1 \text{ seg}} \longleftarrow$$

INSTANTE EN QUE ES MAXIMA LA POSICIÓN.

Vamos ahora a la velocidad. Busquemos el máximo.

La expresión que teníamos era $v = 6\pi \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$. El máximo va a estar cuando el coseno del paréntesis sea 1 (o -1). Por lo tanto, el máximo valor de velocidad será de 6π cm/seg.

Con respecto al instante donde pasa esto... bueno, veamos. Si el coseno vale 1 (o -1) el ángulo será de 0 grados o 180 grados (π).

o sea:

$$\pi t + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow t = -0{,}5 \text{ seg} \quad \text{(NO VA)}$$

Esta solución equivale a decir "medio segundo antes de que se comenzara a medir el tiempo". Por lo tanto, no se considera.

Probemos con la otra. El paréntesis tiene que ser 180°...

$$\pi t + \frac{\pi}{2} = \overset{180°}{\pi} \Rightarrow \pi t = \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 0{,}5 \text{ seg}} \longleftarrow$$ INSTANTE EN QUE ES MÁXIMA LA VELOCIDAD.

Con respecto a la aceleración, es la misma historia. La ecuación es $a = -6\pi^2 \operatorname{sen}(\pi t + \frac{\pi}{2})$. Mirándola un poco veo que el valor máximo de la aceleración será de $6\pi^2$ en módulo y esto se producirá cuando $\operatorname{sen}(\quad) = 1$ (o -1) o sea: $(\quad) = 90°$ (o 270°)

o sea:

$$\boxed{t = 1 \text{ seg}} \longleftarrow$$ INSTANTE EN QUE ES MÁXIMA LA ACELERACIÓN

<u>Aclaraciones</u>:

A veces en los problemas de movimiento armónico uno usa formulas de movimiento circular como $\omega = 2\pi/T$ o $a_{cp} = \omega^2 \cdot R$. Incluso se habla de velocidad angular ω. Y uno dice ¿Por qué usar cosas de movimiento circular si tengo un movimiento armónico que sube y que baja? ¿De qué velocidad angular están hablando?

RTA: Bueno, lo que pasa es que el movimiento armónico en realidad es la proyección de un movimiento circular sobre un eje. Es decir, yo tengo un punto que se mueve con mov. circular. La $\boxed{\text{SOMBRA}}$ de ese punto es la que me va dando el movimiento armónico. Las magnitudes circulares a las que uno hace referencia son las de ese movimiento circular base.

---

2 - Una masa de 3 Kg se sujeta a un resorte que oscila con A = 10 cm y f = 2 hz .

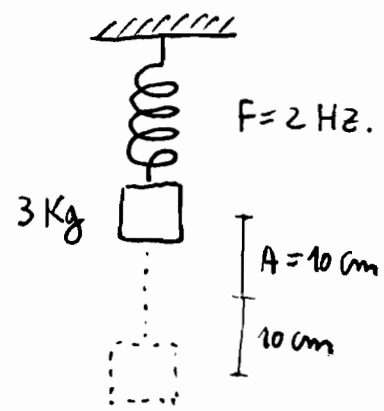
a)- ¿ Cuál es la constante del resorte ?.

b)- ¿ Cuál es la energía total del movimiento ?.

c)- Escribir una ecuación x (t) que describa la posición de la masa respecto a su posición de equilibrio.

Rta: 48 π^2 N/m ; 0,24 π^2

Hagamos un dibujito:



a)- Para un cuerpo de masa $\underline{m}$ atado a un resorte de constante $\underline{K}$, el período de oscilación esta dado por:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

← PERÍODO DE UN RESORTE CON UNA MASA.

La deducción de esta fórmula está en uno de los problemas que vienen después. Despejo la constante:

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m}{K}$$

$$\Rightarrow K = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

como $T = \frac{1}{f}$:

$$\Rightarrow \underline{K = 4\pi^2 m f^2}$$

Reemplazando por los datos $m = 3\,Kg$ y $f = 2\ 1/seg$:

$$K = 4\pi^2 \cdot 3\,Kg \cdot (2\ 1/s)^2$$

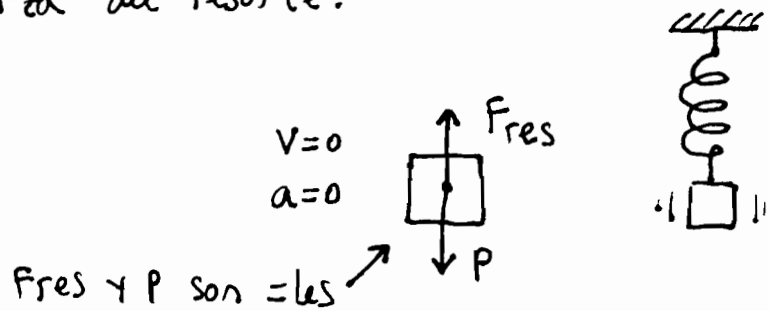
$$\Rightarrow K = 48\,\pi^2\,\frac{Kg}{s^2}$$

Multiplicando arriba y abajo por metro me queda en Newton/m:

$$\Rightarrow \boxed{K = 48\,\pi^2\,\frac{N}{m}} \leftarrow$$ CONSTANTE DEL RESORTE.

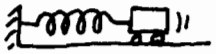
b) - ¿Cuál es la energía total del movimiento?

Bueno, me deben estar pidiendo que calcule la Energía mecánica, es decir la suma de la cinética, la potencial y la elástica.
El valor de esta energía tiene que ser constante porque si no hay rozamiento el resorte debería oscilar forever.
Cuando el resorte está arriba de todo (o abajo de todo) NO hay Energía cinética. Toda la Energía mecánica está en forma de E. elástica. Daría la impresión de que hay energía potencial pero en realidad NO. Es decir, sí, pero no.
Cuando uno colgó el cuerpo del resorte antes de ponerlo a oscilar, el peso del cuerpo obliga al resorte a estirarse un poco. De esa manera, el peso del cuerpo se compensa con la fuerza del resorte.



← DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE MIENTRAS HAY EQUILIBRIO.

Una vez que uno pone el sistema a oscilar, el cuerpo sube y baja, pero como el resorte tenía un estiramiento inicial es como si $\underline{P}$ y $\underline{F_{res}}$ se estuvieran compensando todo el tiempo. De esa manera uno puede no tomar en cuenta la energía potencial. (Es como si el cuerpo no pesara).

Si esto te resulta complicado de entender, podés suponer que el resorte está acostado y el sistema oscila en forma horizontal. (o sea, así: → ). De esta manera la fuerza peso no molesta.

Hecha esta aclaración, repito, cuando el cuerpo esté arriba (o abajo), toda la energía estará en forma de energía elástica. Como la elongación es de 10 cm, esta energía valdrá:

$$E_{Elast} = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2}\, 48\, \pi^2 \frac{N}{m} \cdot (0{,}1\ m)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{Total} = 0{,}24\ \pi^2\ \text{Joule}} \leftarrow$$ ENERGIA TOTAL DEL CUERPO OSCILANDO

c) - Piden que escriba la ecuación de la posición en función del tiempo.

Bueno, en un movimiento armónico la posición $\underline{x}$ viene dada por

$$x = A \operatorname{sen} \omega t$$

La amplitud $\underline{A}$ ya la tenemos. Vale 0,1 m. Calculemos la velocidad angular $\underline{\omega}$ del movimiento circular asociado al movimiento armónico:

$$\omega = 2\pi . f = 2\pi . 2\, \frac{1}{s} = \underbrace{4\pi\, \frac{1}{s}} \leftarrow \underline{\underline{\omega}}$$

La ecuación de la posición en función del tiempo queda:

$$\boxed{X = 0{,}1\ m\ \text{Sen}\left(4\pi \frac{1}{s} \cdot t\right)} \leftarrow$$ ECUACIÓN DE LA POSICIÓN.

Una aclaración: Con respecto al ítem b), yo podría haber calculado la energía total de oscilación de la siguiente manera: Cuando el cuerpo pasa por el medio (es decir, por la posición de equilibrio), sólo tiene energía cinética que vale $\frac{1}{2} m V^2$. Calculemos con qué velocidad pasa por ahí. La expresión de la velocidad en el movimiento armónico es:

$$V = A.\omega \cos \omega t \leftarrow$$ VELOCIDAD

Al pasar por el punto medio, la velocidad es máxima, por lo tanto $\cos \omega t = 1$. Entonces:

$$V_{max} = A.\omega = 0{,}1\ m\ .\ 4\pi \frac{1}{s} = \underline{0{,}4\ \pi \frac{1}{s}}$$

Así que la energía cinética (= a la E_{total}) valdrá:

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2}\ 3\ Kg \left(0{,}4\ \pi \frac{1}{s}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underline{E_{TOT} = 0{,}24\ \pi^2\ J} \leftarrow$$ ENERGÍA TOTAL (VERIFICACIÓN).

Este valor coincide con el que calculé antes. La idea es que veas que mientras el sistema masa-resorte se mantenga oscilando, en todo momento la energía mecánica que posee es de $0{,}24\ \pi^2$ Joule. (Constante). En la realidad real esto no pasa. Aunque yo tenga un resorte sin rozamiento con el aire y sin rozamiento en el soporte, igual se va frenando.

Quiero decir que el movimiento real es Amortiguado.

¿Por qué?. porque al comprimirse y estirarse el resorte, las moléculas rozan entre sí. Esto le va quitando energía al sistema y al final se para.

¿Cómo? ¿y los cero coma veinticuatro pi cuadrado joule dónde están?

RTA: En calor. Ahora el resorte está quieto pero calentito.

Si vos graficás la Energía mecánica en función del tiempo te da esto:

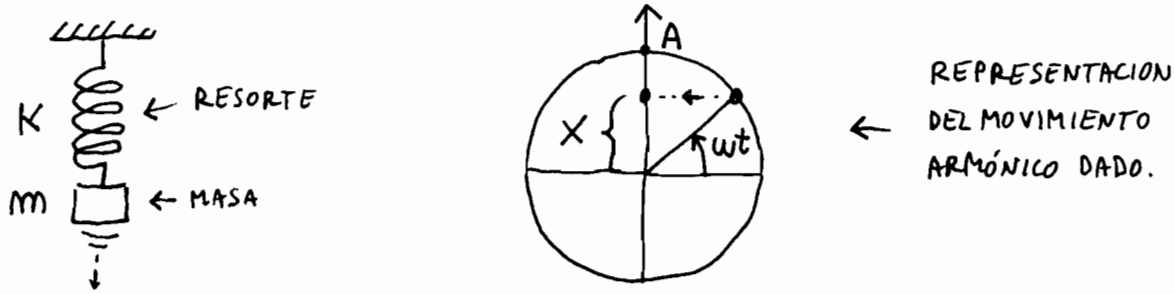
Esto es lo que se llama movimiento armónico amortiguado. Es importante porque es el que verdaderamente ocurre. Fijate:

Es decir, a medida que pasa el tiempo la amplitud de las oscilaciones va disminuyendo en forma exponencial. Esto es lo que pasa después de pegarle una patada a un caño o después de darle un empujón a una hamaca. (Péndulo).

3 - Cuando el desplazamiento de una masa que oscila sujeta a un resorte es la mitad de su amplitud, ¿ qué fracción de su energía total está en forma de energía cinética ?
¿ En qué desplazamiento son iguales su energía cinética y su energía potencial ?

Rta: 3/4 ; $\sqrt{2}/2$

Dicen que tengo una masa unida a un resorte y que el sistema oscila. Bueno, hagamos un dibujito aclaratorio:



a)- El sistema oscilando tiene una energía mecánica que es igual a la suma de la cinética más la elástica. Al igual que en el Problema anterior no hace falta tener en cuenta la energía potencial. (El sistema podría estar puesto acostado →).

Tonces:

$$E_{Total} (= E_{Mec}) = E_C + E_E$$

La energía <u>total</u> que tiene el sistema es igual a la elástica que tiene el resorte cuando está todo comprimido o a la cinética que tiene el cuerpo cuando pasa por el punto del medio ($x=0$).
En $x=0$ el ángulo wt vale <u>cero</u> y $\cos wt = 1$. Entonces la E_{cin} en ese punto será $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (A.w.\cos 0)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{cin_{Max}} = E_{TOT.} = \underline{\frac{1}{2} m A^2 w^2}$$ ← ENERGÍA CINETICA MÁXIMA

De la misma manera puedo calcular la energía total a partir de la energía Elástica. Cuando la compresión es máxima o el estiramiento es máximo, $x = A$. Por lo tanto:

$$E_{El\,máx} = E_{TOTAL} = \underline{\frac{1}{2} K A^2} \quad \leftarrow$$

ENERGÍA ELASTICA MAXIMA.

Tengo 2 expresiones para la energía total. ¿Cuál de las 2 me conviene usar?. RTA: cualquiera de las 2. Es un poco más simple con la Energía elástica, así que agarro por ahí.

Me piden que diga cuánto vale la relación E_{cin}/E_{TOT} para $x = \frac{A}{2}$.

La Energía total ya la conozco. Vale $\frac{1}{2} K A^2$. Calculo entonces el valor de la E_{cin} para $x = A/2$:

$$E_{TOT} = E_C + E_E \quad \Rightarrow$$

$$E_C = E_{TOT} - E_E$$

Para una elongación $\underline{x}$ igual a la mitad de la amplitud la Energía elástica vale: $E_{El} = \frac{1}{2} K \left(\frac{A}{2}\right)^2$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} K A^2 - \frac{1}{2} K \frac{A^2}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{C\left(x=\frac{A}{2}\right)} = \frac{3}{8} K A^2} \quad \leftarrow$$

ENERGÍA CINETICA CUANDO LA ELONGACIÓN VALE A/2.

Como me pedían que calcule E_{cin}/E_{TOT} para $x = \frac{A}{2}$ hago:

$$\boxed{\frac{E_{cin}}{E_{TOT}} = \frac{\frac{3}{8} K A^2}{\frac{1}{2} K A^2} = \frac{3}{4}} \quad \leftarrow$$

VALOR DE LA RELACION PEDIDA.

b)_ Preguntan cuál será la elongación para que se cumpla que la energía cinética sea igual a la potencial. Supongo que habrán querido decir "potencial Elástica". Potencial gravitatoria ya sabemos que no hay (o que no hay que tomarla en cuenta, digamos). Hecha la aclaración, calculemos el valor de $\underline{x}$ tal que $E_C = E_E$. En cualquier punto del recorrido la energía total es la suma de la cinética más la elástica. Bueno, planteemos esto:

$$E_{TOT} = E_{Cin} + E_{El}$$

La energía mecánica total ya la teníamos de antes, valía $\frac{1}{2} K A^2$. La energía elástica cuando la elongación es equis vale $\frac{1}{2} K x^2$. Bien.. ¿Cuánto vale ahora la energía cinética para esa elongación equis?. Muy fácil. El problema pide que valga lo mismo que la energía elástica. Por lo tanto la energía cinética para la elongación $\underline{x}$ también vale $\frac{1}{2} K x^2$.

Reemplazando:

$$\underbrace{\frac{1}{2} K A^2}_{E_{TOT.}} = \underbrace{\frac{1}{2} K x^2}_{E_{Cin.}} + \underbrace{\frac{1}{2} K x^2}_{E_{El.}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{K} A^2 = \cancel{K} x^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{A^2}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2} A}$$

← VALOR DE LA ELONGACION QUE CUMPLE LO PEDIDO

4 - Un cuerpo se mueve con un MAS de período 0,25 seg. y amplitud 0,15 m. Su masa es de 400 g. Hallar las expresiones de la elongación, velocidad, aceleracion, energía cinética, energía potencial y energía total en función del tiempo y hacer un gráfico para cada uno de ellos. Hallar el valor máximo y mínimo para cada uno e indicar en qué elongación e instante se producen.

Tenemos un movimiento armónico de $T = 0{,}25\ s$ y $A = 0{,}15\ m$.

Supongamos que lo que está vibrando sea algo como esto:

Las expresiones de la posición, velocidad y aceleración son:

$$\begin{cases} x = A \operatorname{sen} \omega t \\ v = A\omega \cos \omega t \\ a = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

La velocidad angular $\underline{\omega}$ del movimiento circular asociado al movimiento armónico vale: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}25\ s} = \underbrace{8\pi\ \frac{1}{s}}$ ← ω

Las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} x = 0{,}15 \operatorname{sen}(8\pi t) & \leftarrow \text{ELONGACION} \\ v = 0{,}15 \cdot 8\pi \cdot \cos(8\pi t) & \leftarrow \text{VELOCIDAD} \\ a = -0{,}15\,(8\pi)^2 \operatorname{sen}(8\pi t) & \leftarrow \text{ACELERACION} \end{cases}$$

Las energías valdrán:

$$E_{TOT} = E_{cin\,max} = \frac{1}{2} m V_{max}^2 \Rightarrow$$

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}\, 0{,}4\ Kg\,(0{,}15 \cdot 8\pi)^2 = \underline{2{,}84\ J}$$

E_{TOTAL}.

La Energía cinética será 1/2 de la masa por la velocidad al².

$$\Rightarrow E_{cin} = \frac{1}{2}\, 0{,}4\,Kg\left[0{,}15 \cdot 8\pi \cos(8\pi t)\right]^2$$

$$\Rightarrow \underline{E_{cin} = 2{,}84 \cos^2(8\pi t)} \leftarrow E_{cinetica}.$$

Para calcular la E. elástica podría calcular la constante del resorte y hacer $\frac{1}{2}Kx^2$. Como en realidad no me dicen que el sistema está formado por una masa y un resorte, voy a calcularla como $E_{TOT} - E_{cin}$:

$$E_{El} = E_{TOT} - E_{cin} \Rightarrow$$

$$E_{EL} = 2{,}84\,J - 2{,}84\,J \cos^2(8\pi t)$$

$$\Rightarrow E_{El} = 2{,}84\,J\,(1 - \cos^2 8\pi t)$$

$$\Rightarrow \underline{E_{El} = 2{,}84 \operatorname{sen}^2(8\pi t)} \leftarrow \text{Energía ELASTICA.}$$

Para calcular los valores máximos que toman x, v, a, E_c y E_E considero que los cos( ) y los sen( ) tienen que valer 1. Para calcular los valores mínimos considero que tienen que valer CERO. Empecemos con la posición:

$$x = 0{,}15 \operatorname{sen}(8\pi t)$$

$$\boxed{x_{max} = 0{,}15\,m}$$

Esto ocurrirá cuando $\operatorname{sen}(8\pi t) = 1 \Rightarrow 8\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_{max} = \frac{1}{16}\,seg}$

De la misma manera, el valor mínimo de la posición será $x=0$ y eso ocurrirá en $t=0$. Vamos a la velocidad:

$$V = 0{,}15\ 8\pi \cos(8\pi t)$$

$$\Rightarrow V_{max} = 0{,}15 \cdot 8\pi = \underline{3{,}77\ \frac{m}{s}}$$

Eso ocurrirá cuando $\cos(8\pi t) = 1 \Rightarrow 8\pi t = 0 \Rightarrow \underline{t=0}$.

En ese momento la elongación valdrá $\underline{x_{(t=0)} = 0}$.

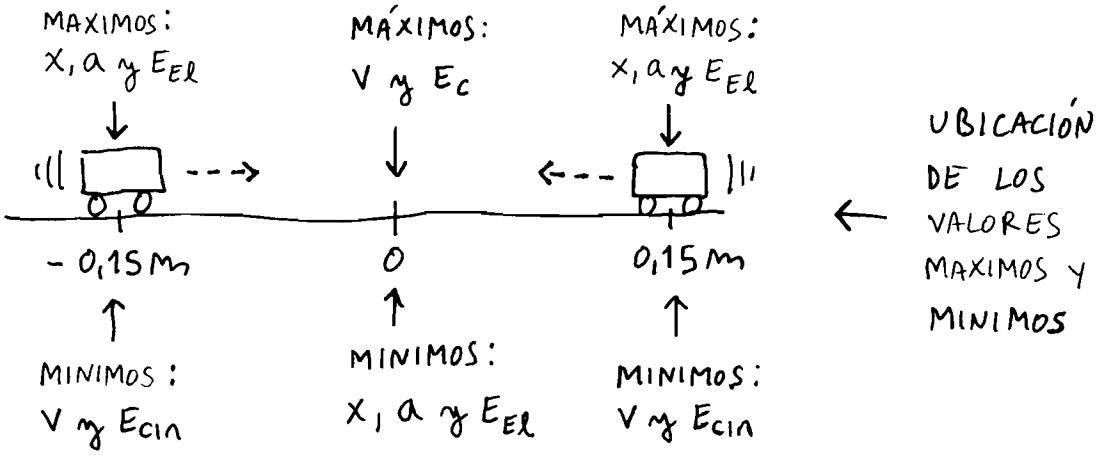
La velocidad será mínima cuando $\cos(8\pi t)$ sea $= 0$, o sea $8\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\underline{V_{min} = 0 \quad \text{en} \quad t = \frac{1}{16}\ seg}$$

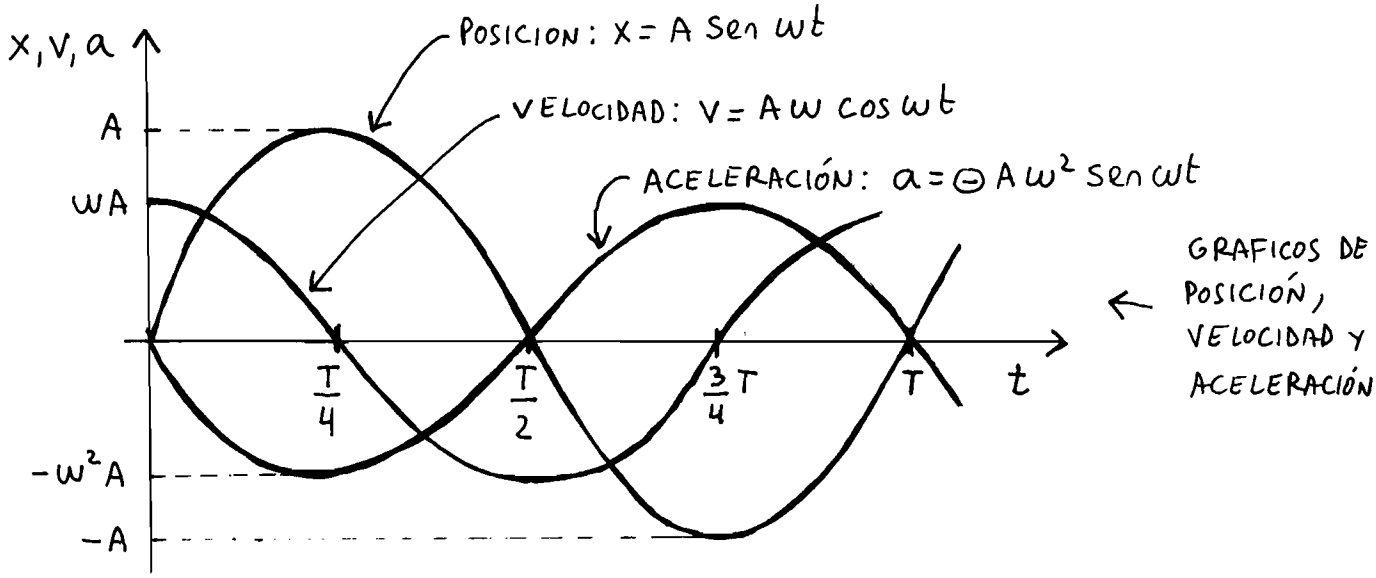
En ese momento la elongación valdrá: $\underline{x_{(t=1/16)} = 0{,}15\ m}$.

Así habría que seguir haciéndolo para las magnitudes que faltan. Creo que no vale la pena porque es más que nada hacer millones de cuentas. Aparte en realidad habría que dar los valores en forma general lo que es más pesado todavía. (Ej: La velocidad máxima en módulo es de 3,77 m/s y esto ocurrirá en $t=0$, $t=1/8$, $t=2/8$, etc.). Sí creo que vale la pena indicar <u>DONDE</u> ocurrirán estos valores máximos y mínimos marcándolos a ojo sobre la trayectoria.

Fijate:

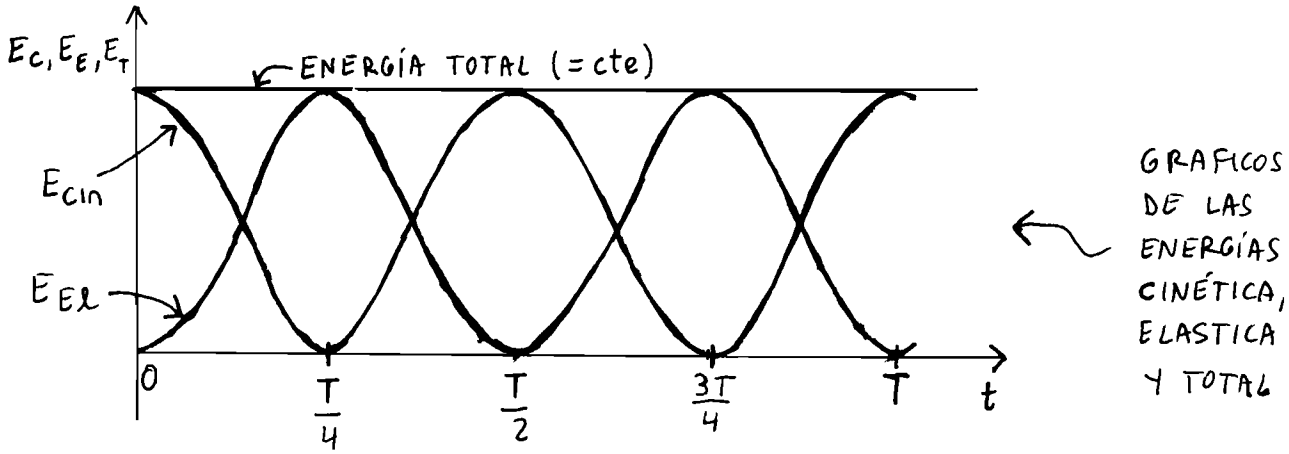


sí convendría darle una mirada a los graficos que indican como varían estas magnitudes en el tiempo:



Fijate que tanto la posición como la velocidad y la aceleración varían armónicamente (= sinusoidalmente) con el tiempo.

Vamos a los gráficos de las energías que también son lindos:



Para graficar estas funciones tuve en cuenta que la energía elástica es $1/2\, K x^2 = 1/2\, K\,(A \operatorname{sen} \omega t)^2 = 1/2\, K A^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$. De la misma manera la $E_{cin} = 1/2\, m v^2 = 1/2\, m\,(A\omega \cos \omega t)^2 = 1/2\, m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t$. Por lo tanto la curva de la energía elástica tiene forma de seno cuadrado y la de la $E_{cinética}$ de coseno ^{2}.

5 - Hallar mediante la construcción de Fresnell la resultante de la superposición de los movimientos armónicos siguientes :

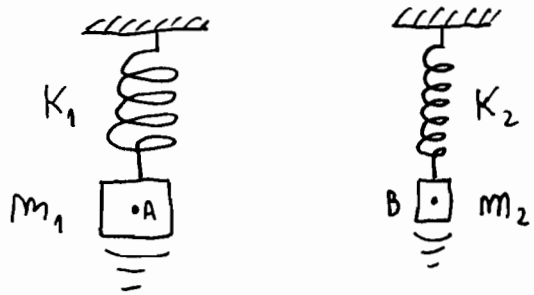
$$y_1 = 5 \text{ sen } \omega t \; ;$$
$$y_2 = 5 \text{ sen } (\omega t + \pi/2)$$

Verificar analíticamente y escribir la ecuación correspondiente.

RTA: $y = \sqrt{50} \text{ sen } (\omega t + \pi/4)$

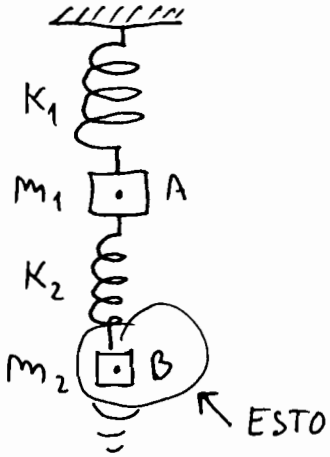
Vamos a ver que es eso de "superponer movimientos armónicos". Básicamente es más o menos lo que vos te estás imaginando, es decir, obligar a una cosa a que se mueva con 2 movimientos armónicos a la vez.

A ver si nos entendemos. Supongamos que tengo 2 resortes con 2 masas. Cada resorte vibra con su propio movimiento armónico:



← 2 RESORTES CON 2 MASAS. CADA RESORTE TIENE SU PROPIO MOVIMIENTO ARMÓNICO.

Ahora hago lo siguiente: Pongo los 2 resortes uno a continuación del otro. Si supongo que la vibración de cada resorte NO influye sobre el otro... ¿Cuál será el movimiento resultante de la masa de abajo?



← LA PREGUNTA ES: SI CADA RESORTE OSCILA COMO SI EL OTRO NO ESTUVIERA... ¿CUAL SERÁ EL MOVIMIENTO RESULTANTE DEL PUNTO B?

La respuesta a esto también es lo que te estás imaginando, es decir: y bueno, si el resorte 1 vibra con una ecuación $x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t$ y el resorte 2 vibra con una ecuación $x_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$, la vibración resultante será $x = A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + A_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$.

¿Es correcto esto?. RTA: Sí, es correcto.

Vamos a hacerlo para que veas como da. Los movimientos son:

$$\begin{cases} y_1 = 5 \operatorname{sen} \omega t \\ y_2 = 5 \operatorname{sen} (\omega t + \pi/2) \end{cases} \leftarrow \text{MOVIMIENTOS QUE ME DAN}$$

Notá lo siguiente: 1)_ A la elongación no la llaman x sino y. (ES lo mismo. Se la puede llamar x o y porque es una posición).

2)_ Los 2 movimientos tienen la misma pulsación ω. Esto quiere decir que "giran" con la misma velocidad angular, es decir, que tienen el mismo período y la misma frecuencia. (Tardan lo mismo en dar una vuelta, digamos).

3)_ Los 2 movimientos tienen la misma Amplitud.

Aclarado esto, hagamos la suma. Recordar por favor que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha . \cos \beta + \operatorname{sen} \beta . \cos \alpha$. Entonces:

$$y_1 + y_2 = 5 \operatorname{sen} \omega t + 5 \operatorname{sen} (\omega t + \pi/2)$$

$$\Rightarrow y = 5 \operatorname{sen} \omega t + 5 \left(\operatorname{sen} \omega t . \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}_{1} . \cos \omega t \right)$$

$$\Rightarrow y = 5 (\operatorname{sen} \omega t + \cos \omega t)$$

Bueno pero... ¿cómo hago ahora para resolver esto?. Habría que ver a qué es igual la expresión $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$. (Alguna fórmula debe haber).

Ah, ya sé!. Se me acaba de ocurrir un truco. Multiplico y divido por $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (que es igual al seno o coseno de 45°).

$$5(\text{sen}\,\omega t + \cos\omega t) = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\text{sen}\,\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\omega t\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\text{sen}\,\omega t \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos\omega t \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora el choclo que está en el paréntesis es $\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Entonces:

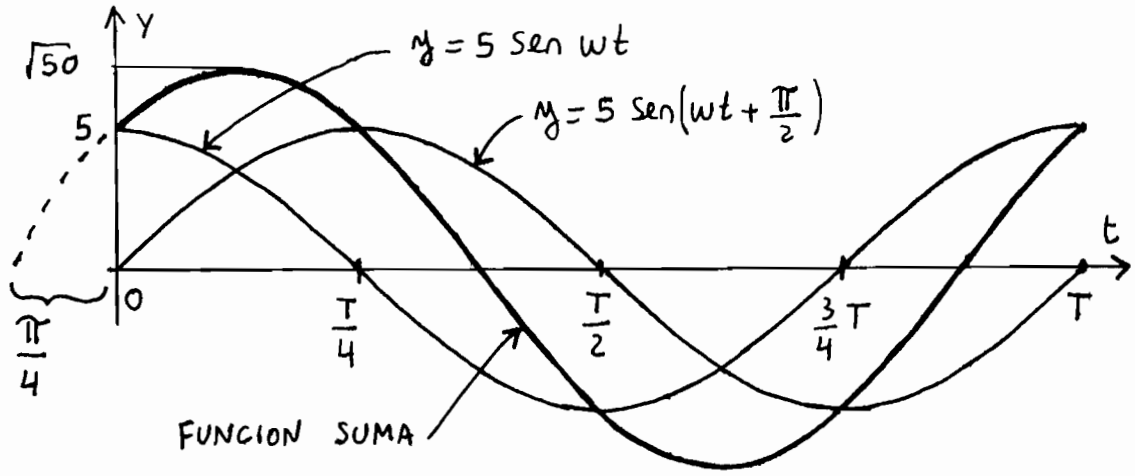
$$y = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Racionalizando:

$$\boxed{y = \sqrt{50}\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

← ECUACIÓN DE LA SUPERPOSICIÓN DE LOS 2 MOV. ARM.

Esto que hice fue hallar <u>ANALITICAMENTE</u> la ecuación del movimiento resultante. Voy a representar esto en un grafiquito para que veas cómo es cada una de las funciones y cómo da la función suma.



Acá se ve un poco mejor por que la función resultante tiene amplitud $\sqrt{50}$ ($\simeq 7{,}07$) y por que está corrida en pi sobre 4. Para obtenerla fui sumando punto a punto los valores de las otras 2 funciones.

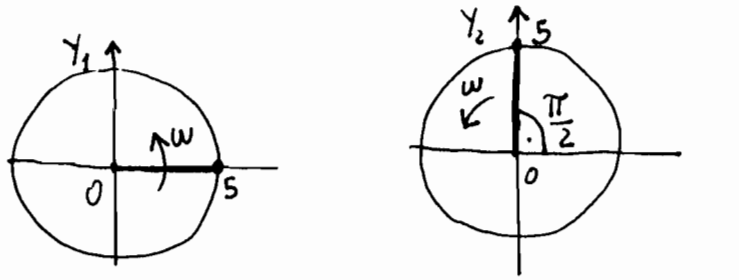
Todo esto es muy lindo pero muy engorroso. Hay que andar haciendo graficos complicados y sumar funciones seno y coseno usando trucos matemáticos. Por eso se buscó otra manera de hacer esto y se encontró. Se llama representación Fasorial de Fresnell. (Atento).

METODO FASORIAL (REPRESENTACIÓN DE FRESNELL)

Fresnell dice lo siguiente: Habíamos quedado en que podíamos representar a la función $y = 5 \text{ sen } \omega t$ tomando la sombra de un punto que gira en una circunferencia de radio 5 y velocidad angular omega.

Bien.

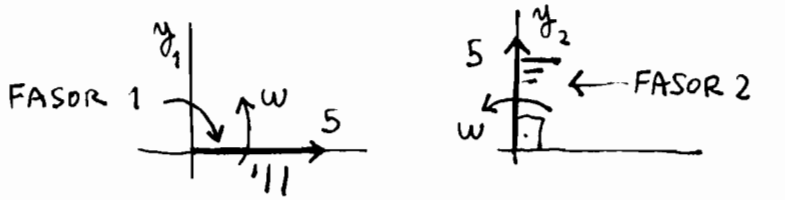
Lo mismo podemos hacer con la función $y = 5 \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Fijate:



$y_1 = 5 \text{ sen } \omega t$ $\qquad$ $y_2 = 5 \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

← MOVIMIENTOS ARMÓNICOS GENERADOS POR PUNTOS GIRATORIOS.

Ahora Fresnell dice: Asociemos a cada punto que gira un <u>vector rotatorio</u>. Llamémoslo <u>FASOR</u> y digamos que el movimiento armónico está dado por la proyección de este Fasor sobre el eje vertical. Fijate:

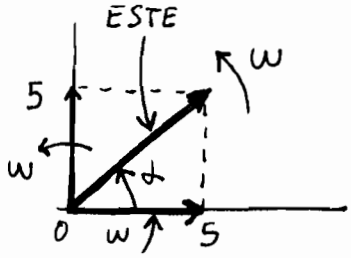


$y_1 = 5 \text{ sen } \omega t$ $\qquad$ $y_2 = 5 \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

← MOVIMIENTOS ARMONICOS GENERADOS POR VECTORES ROTATORIOS. (FASORES).

¿De que sirve todo esto?. Ahora vas a ver.

La trampa es esta. Si yo digo que cada uno de los movimientos está dado por un vector, el movimiento resultante (suma) estará dado por la <u>SUMA</u> de los 2 vectores. (suma vectorial). O sea, esto:



← FASOR RESULTANTE DE LA SUMA DE DOS FASORES

¿Qué hemos obtenido?, dice Fresnell. Hemos obtenido $\boxed{\text{OTRO}}$ vector rotatorio (Fasor) tal que su sombra sobre el eje vertical nos da el movimiento resultante. Atención. Los 3 vectores giran con la misma omega.

Lo que yo dibujé es una foto de los 3 en el instante $t=0$.

Hallemos la amplitud y la fase inicial del fasor resultante:

$$A = \sqrt{5^2+5^2} \Rightarrow \underbrace{A = \sqrt{50}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{5}{5} \Rightarrow \underbrace{\alpha = \frac{\pi}{4}} \quad (45°)$$

Por lo tanto el movimiento armónico resultante tiene por ecuación:

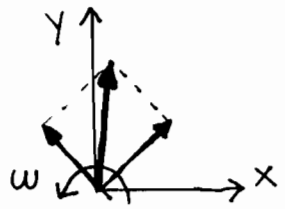
$$\boxed{y = \sqrt{50}\ \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Esta expresión coincide con la que habíamos hallado antes, sólo que la obtuvimos por un procedimiento más corto. De más está decir que si nos hubieran dado 3 movimientos armónicos, la solución analítica hubiera sido <u>INFERNALMENTE</u> complicada.

Notá la diferencia entre vector y fasor. Un vector es un vector. Un fasor es un vector <u>rotatorio</u>.

Ahí está. Eso es lo que tenés que saber.

Este asunto de los fasores lo vas a volver a ver otra vez en interferencia y difracción y también más adelante en electricidad cuando haya que representar tensiones y corrientes alternas.
No tenés que saber el método fasorial por que te lo vayan a tomar ahora. No te lo van a tomar. (y si te lo toman te matás de risa porque es sumar vectores). Tenés que saberlo porque lo vas a necesitar más adelante para entender temas más peludos que este.
(creo que fui claro, no?).
Y unas últimas cositas: 1)- Repito, el movimiento resultante está dado por la proyección del fasor resultante sobre el eje vertical. Este fasor gira todo el tiempo con velocidad angular $\underline{\omega}$ al igual que los otros dos. Cuando uno los dibuja, lo hace para un instante dado en el tiempo. Yo podría haberlos dibujado también así:



← ATENCIÓN, LOS 3 FASORES GIRAN SIEMPRE JUNTOS.

2)- Para poder aplicar este método, todos los fasores tienen que tener la misma velocidad angular. Sinó <u>no</u> se pueden sumar. (Ej: $y_1 = 5 \operatorname{sen} \omega_1 t$ e $y_2 = 5 \operatorname{sen} \underline{\underline{\omega_2}}\, t$ <u>NO</u> se pueden sumar porque los vectores giran con diferente velocidad).

3)- Los movimientos armónicos componentes pueden ser uno ⊥ al otro, como si tuviera 2 resortes puestos así: . Esto da lugar a unos dibusitos raros que se llaman curvas de Lissajous. Son las que los electrónicos andan mirando todo el tiempo en los osciloscopios.

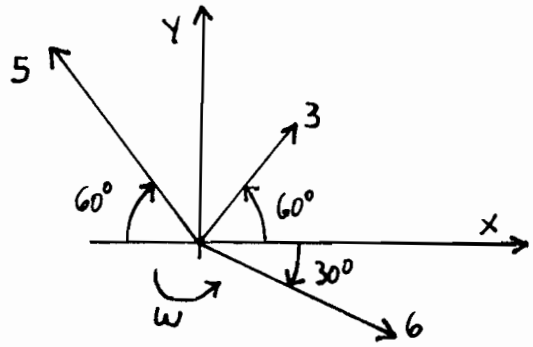
6 - Hallar mediante la construcción de Fresnell la resultante de la superposición de los movimientos armónicos siguientes:

$$y_1 = 3 \text{ sen } (\omega t + \pi/3)$$
$$y_2 = 6 \text{ sen } (\omega t - \pi/6)$$
$$y_3 = 5 \text{ sen } (\omega t + 2\pi/3)$$

Verificar analíticamente y escribir la ecuación correspondiente.

RTA: $y = 5{,}74 \text{ sen } (\omega t + 43{,}6°)$

Voy a hacer el diagrama fasorial para poder hacer la suma. Pi sobre 3 equivale a 60°, Pi sobre 6 a 30° y $2\pi/3$ a 120°.



← REPRESENTACION DE LOS FASORES QUE ME DAN.

Para hallar el fasor resultante descompongo en x y en y. (se podría hacer gráficamente también pero no da exacto). Veamos:

En X: $F_x = 6 \cos 30° + 3 \cos 60° - 5 \cos 60°$

$$\underline{F_x = 4{,}196}$$

En Y: $F_y = 3 \text{ sen } 60° + 5 \text{ sen } 60° - 6 \text{ sen } 30°$

$$\underline{F_y = 3{,}928}$$

Por lo tanto el módulo del fasor resultante será:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{4{,}196^2 + 3{,}928^2}$$

$$\Rightarrow \underline{F = 5{,}74}$$ ← MÓDULO DEL FASOR

El ángulo que forma con el eje horizontal es $tg\,\alpha = \frac{F_Y}{F_X} \Rightarrow$

$$tg\,\alpha = \frac{3{,}928}{4{,}196} \Rightarrow$$

$$\underline{\alpha = 43{,}11^\circ = 43^\circ\,6'} \leftarrow$$ ANGULO DEL FASOR

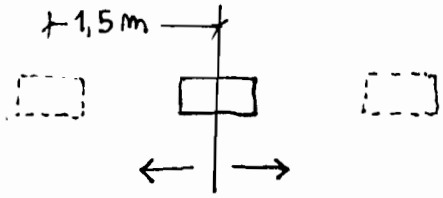
Por lo tanto el Fasor resultante es:

$$\boxed{y = 5{,}74\ \text{sen}\,(\omega t + 43^\circ\,6')} \leftarrow$$ FASOR RESULTANTE

Piden verificar analíticamente el valor obtenido. Bueno, para hacer eso tendría que sumar matematicamente las 3 funciones seno que me dan... (Lo cual es choclazo).
Lo siento mucho, que lo haga otro.

---

7 - Una plancha horizontal oscila con un movimiento armónico simple de A = 1,5 m y una frecuencia de de 15 oscilaciones por minuto.
Calcular el valor mínimo del coeficiente de fricción para que un cuerpo colocado sobre la plancha no resbale cuando ésta se mueve.



RTA: $\mu = 0{,}38$

Por el dibujo que me dan interpreto lo siguiente: Parece ser que hay una cosa que se mueve alternativamente para la derecha y para la izquierda con movimiento armónico. Sobre esa cosa se quiere poner otra cosa sin que resbale.
Bueno, calculemos los parámetros del movimiento armónico. Dicen que la frecuencia es de 15 oscilaciones por minuto. Por lo tanto:

$$f = \frac{15}{60\,s} = 0{,}25\ \frac{1}{s} \leftarrow$$ FRECUENCIA

Omega valdrá:

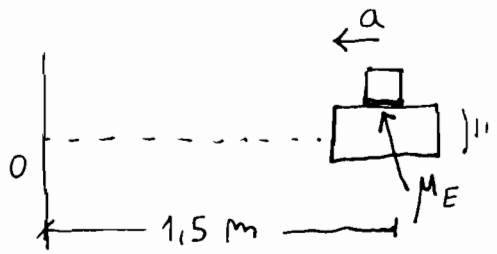
$$\omega = 2\pi f = 2\pi\ 0{,}25\ \frac{1}{s} = \underline{1{,}57\ \frac{1}{s}} \leftarrow \omega$$

Si la amplitud del movimiento es de 1,5 m y $\underline{\omega}$ vale 1,57 1/s, las ecuaciones de este movimiento van a ser:

$$\begin{cases} X = 1{,}5 \text{ sen } 1{,}57\, t \\ V = 1{,}5 \cdot 1{,}57 \cos 1{,}57\, t \\ a = \ominus\, 1{,}5\; 1{,}57^2 \text{ sen } 1{,}57\, t \end{cases}$$

← ECUACIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO DADO

Ahora vamos a esto: ¿qué significa la frase "no resbale"?. Bueno, acá hay que pensar un poquito. Si yo pongo un cuerpo arriba del que está oscilando y el de abajo acelera o frena bruscamente, el de arriba puede llegar a patinar. Ahora bien, en un movimiento armónico la aceleración <u>NO</u> es constante, es función de la posición. De manera que la mayor posibilidad de deslizamiento ocurrirá donde sea mayor la aceleración. Pregunta: ¿En qué lugar de la trayectoria pasará esto?. <u>RTA</u>: En las puntas. Ahí la aceleración es máxima.



← EN LOS EXTREMOS DE LA TRAYECTORIA LA ACELERACIÓN ES <u>MÁXIMA</u>

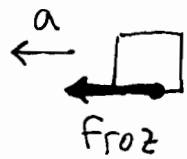
¿Cuánto vale esa aceleración?. Bueno, el valor de $\underline{a}$ está dado por $a = \ominus\, 1{,}5 \cdot 1{,}57^2 \text{ sen } 1{,}57\, t$. Su valor máximo ocurrirá cuando sen 1,57 t valga $\underline{1}$. Entonces:

$$a_{max} = \ominus\, 1{,}5\, m \cdot \left(1{,}57\, \frac{1}{s}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{|a_{max}| = 3{,}7\, \frac{m}{s^2}}$$

← ACELERACIÓN MÁXIMA

Hagamos el diagrama de cuerpo libre del cuerpo de arriba para poder plantear la ecuación de Newton:



$$froz_{max} = m\, a_{max}$$

$$\Rightarrow \mu_E \cdot \cancel{m} g = \cancel{m} \cdot a_{max} \Rightarrow$$

$$\mu_E = \frac{a_{max}}{g} = \frac{3{,}7\ m/s^2}{10\ m/s^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_E = 0{,}37} \leftarrow$$

VALOR DEL COEFIC. DE ROZAMIENTO

Este coeficiente de rozamiento es el <u>MINIMO</u> posible. Con cualquier coeficiente de rozamiento mayor no habrá resbalamiento.

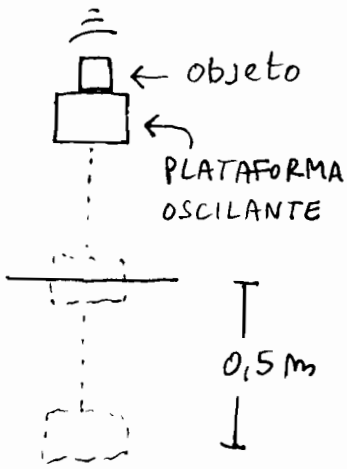
Nota: El μ_E hallado es <u>estático</u>, porque partimos de la base de suponer que el cuerpo no deslizaba.

---

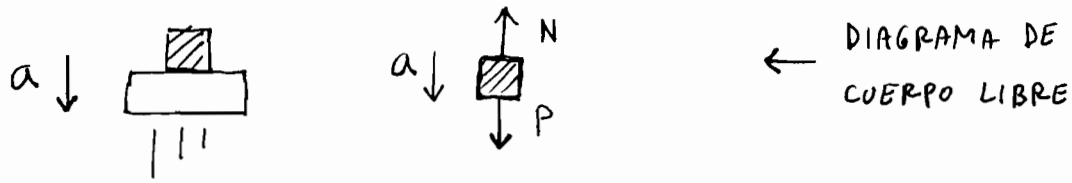
8 - Una plataforma realiza un movimiento armónico simple según una dirección vertical con amplitud A = 0,5 m.
¿ Cuál debe ser el período mínimo de oscilación para que un cuerpo colocado sobre la plataforma no se separe de ella ?.

RTA: T = 1,42 s

Vamos a ver como es esto. Tenemos un cuerpo que oscila hacia arriba y hacia abajo con Amplitud A = 0,5 m. Ahora pongo arriba de él otro objeto y quiero que no se despegue de la Plataforma de abajo. PEro...
¿Por qué habría de despegarse?



claro, lo que pasa es lo siguiente: cuando la plataforma sube y está llegando arriba, va frenando. La frenada podría ser tan brusca que el objeto de pronto encontraría que le falta el piso abajo. Lo mismo podría pasar cuando la plataforma arranca hacia abajo después de haber llegado arriba. (Ahora la "acelerada" debería ser muy violenta). Hagamos el diagrama de cuerpo libre para aclarar las cosas. Supongamos que el tipo está arriba:



Tomé el momento en que la plataforma llega arriba de todo porque ese es el momento en donde la aceleración es <u>máxima</u>. (Atención, esta aceleración apunta hacia abajo esté la plataforma frenando o arrancando).

Planteemos la ecuación de Newton según el diag. de cuerpo libre:

$$P - N = m a$$

Bien. Esta ecuación vale mientras la plataforma y el objeto están en contacto... PERO... ¿qué pasa en el momento <u>exacto</u> en que el objeto se separa de la plataforma?

<u>RTA</u>: Deja de haber contacto entre ellos, es decir, desaparece la Fuerza Normal. Dicho de otra manera, en el momento <u>crítico</u> ene vale <u>CERO</u>. Bueno, planteemos esto:

$$P - \cancel{N}^{0} = m.a \Rightarrow \cancel{m}.g = \cancel{m}.a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = g} \leftarrow \text{VER}$$

Esta es la conclusión a la que quería llegar: Para que el objeto se separe, la aceleración de la plataforma debe ser la de la gravedad. (Es decir, la de la gravedad o mayor).

La aceleración de la plataforma vale $a = \ominus A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$, asique la <u>máxima</u> aceleración posible ($\operatorname{sen} \omega t = 1$) es $A\omega^2$. Lo planteo:

$$|a_{max}| = A\omega^2 = g$$

Pongamos la pulsación $\underline{\omega}$ en función del período por medio de $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = g \Rightarrow$$

$$A\, 4\pi^2 = g \cdot T^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 A}{g}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$$

Reemplazando por los datos ($A = 0{,}5\ m$, $g = 10\ m/s^2$) ...

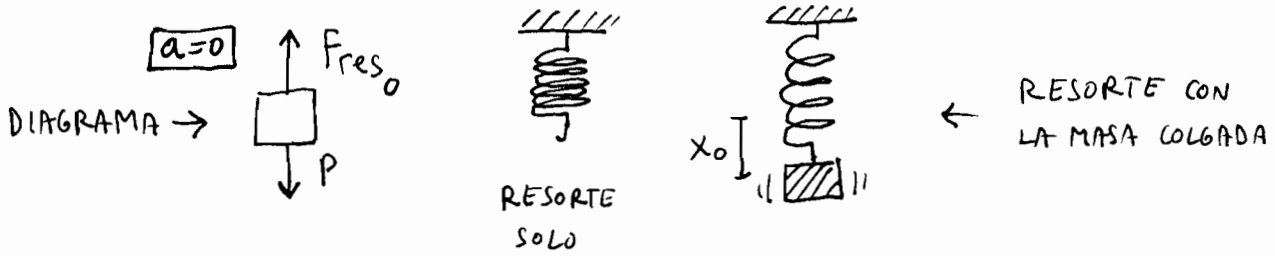
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5\ m}{10\ m/s^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 1{,}4\ seg} \leftarrow$$ PERÍODO DE OSCILACION.

Este es el período de oscilación que tiene que tener la plataforma para estar en el caso <u>límite</u>. (Objeto a punto de despegarse de la plataforma). Creo que se entiende que con cualquier período $\boxed{\text{menor}}$ a este (Ej $T = 1{,}3\ s$) se producirá la separación. (Al disminuir el período aumenta la velocidad angular porque omega es dos Pi sobre te).

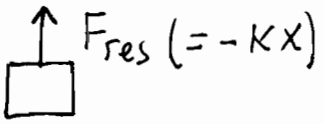
9 - Demostrar que el movimiento de oscilación de un resorte que tiene una masa colgada es armónico simple.
Calcular elvalor del período de oscilación.¿ De qué depende ?.

Pongamos una masa colgada de un resorte y analicemos un poco:



Cuando cuelgo el peso del resorte éste se estira una distancia X_0. Ahí queda el cuerpo colgado en equilibrio. En ese momento el peso P es equilibrado por la fuerza inicial que hace el resorte. (F_{res_0}). Si ahora yo tiro del cuerpo hacia abajo, saco al sistema del equilibrio y el cuerpo empieza a oscilar.

Podemos considerar que la única fuerza que tira del cuerpo es la del resorte por que el peso se encuentra permanentemente compensado por la fuerza que surgió del estiramiento inicial. (F_{res_0}).
Entonces lo que tenemos es esto:



Es decir, tenemos un cuerpo que está movido por una fuerza que es proporcional a la separación de la posición de equilibrio pero de sentido contrario. Esta es la característica fundamental del movimiento armónico. Por lo tanto, en principio, el movimiento de una masa que oscila colgada de un resorte tendría que darme armónico simple

Vamos ahora a calcular el período de las oscilaciones. Si el movimiento es armónico las ecuaciones de la posición velocidad y aceleración van a ser:

$$\begin{cases} X = A \operatorname{sen} \omega t \\ V = A\omega \cos \omega t \\ a = \ominus A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

x

Veo que la 3ra ecuación se puede poner como $a = \ominus \omega^2 X$. Entonces, si la única fuerza que tira del cuerpo es la del resorte, planteando la ley de Newton $\Sigma F = m.a$:

$$F_{res} = m.a \Rightarrow -KX = m.a$$

$$\Rightarrow -KX = m\underbrace{(-\omega^2 X)}_{a}$$

$$\Rightarrow K = m\omega^2$$

Puedo poner a la velocidad angular omega como 2π sobre T. $\Rightarrow$

$$K = m\frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

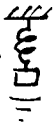
$$\Rightarrow T^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{K}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}} \longleftarrow$$

PERÍODO DE OSCILACIÓN DE UNA MASA QUE CUELGA DE UN RESORTE.

Analicemos un poco lo que obtuvimos. Veamos. ¿De qué depende el período de oscilación?. RTA: de la constante del resorte y de la masa del cuerpo que cuelga. Atención de la $\boxed{\text{MASA}}$ del cuerpo que cuelga, NO de su peso. El peso NO aparece en la expresión del período. Esto es importante porque significa que T es

el mismo en cualquier lugar del universo donde uno ponga el sistema. Es decir, si acá en La Tierra el período de oscilación es de 1,27 segundos, en La Luna <u>también lo será</u>. El resorte no se ve influido por el valor de la gravedad del lugar donde uno haga el experimento. Es más, el sistema también oscila en un lugar donde <u>No hay gravedad</u>, y su período será también de 1,27 segundos. (De hecho este es uno de los métodos que se usan para "pesar" un cuerpo en naves espaciales y lugares por el estilo. Se ata el cuerpo a un resorte de constante conocida y se lo hace oscilar. Se mide el período y se despeja la masa).

También es lo mismo poner el cuerpo a oscilar así →  o así → .

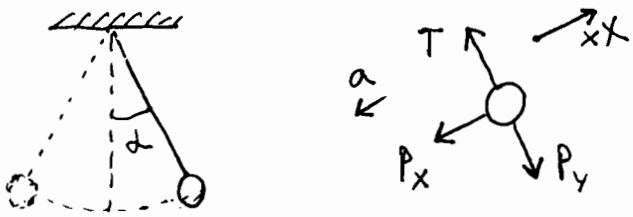
El período de oscilación será el mismo.

Fijate también que el período tampoco depende de la amplitud de las oscilaciones. Lo estires más o lo estires menos, el resorte siempre tarda lo mismo en ir y volver. (Igual que lo que pasa con un péndulo común, valga la "casualidad").

ULTIMA ACLARACIÓN: Se supone que al hacer la demostración yo tendría que haber aclarado que el resorte no tenía masa. (Toda la masa que oscilaba se encontraba concentrada en el peso que yo le colgaba abajo. Eso es lo que yo supuse). En la realidad real esto <u>no</u> es así. Los resortes tienen masa y eso tiene una ligera influencia en el período de oscilación. Pero como pasa siempre, si la masa del resorte es muy chica comparada con la del cuerpo que se cuelga (suposición razonable), el efecto de la masa oscilante del resorte es muy chico y se puede despreciar.

10- Demostrar que el movimiento de oscilación de un péndulo es armónico simple si las oscilaciones son pequeñas. Calcular el valor del período para un péndulo de masa m y longitud l. ¿ De qué depende el período de oscilación de un péndulo ?.

Pongamos el péndulo a oscilar y analicemos un poco el asunto:

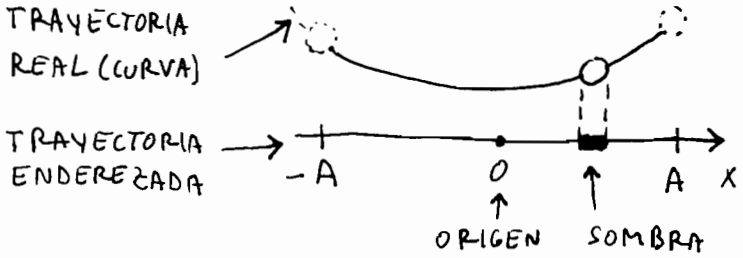


← EL PENDULO Y SU DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Mirá el diagrama de cuerpo libre. La tensión y el peso en y no molestan. Ninguna de las 2 tiene influencia sobre el movimiento del cuerpo. La fuerza que obliga al cuerpo a moverse es el peso en x. Voy a plantear ahora la 2da ley de Newton $\Sigma F = m.a$, pero antes fijate esto:

1er TRUCO:

La trayectoria que sigue la bolita del péndulo es un arco de circunferencia. Pero yo no quiero un movimiento armónico curvilíneo. Yo necesito un movimiento armónico sobre un eje. Así que lo que hago es "enderezar" la trayectoria, o si lo preferís de otra manera, miro la sombra de la bolita sobre el suelo.



← NO SE CONSIDERA LA TRAYECTORIA COMO UNA CURVA SINO COMO UNA RECTA.

PREGUNTA: ¿Es válido hacer esto?. Bueno, en realidad no. Pero uno puede suponer que las oscilaciones son muy chicas. (Es decir, de

pequeña amplitud). En ese caso, a medida que el ángulo α disminuye, la diferencia entre la recta y el arco de curva se achica. (α es el ángulo de separación de la posición de equilibrio).

Bien, aclarado esto planteemos la segunda ley de Newton en X:

$$\Sigma F = m.a \Rightarrow \ominus P_x = m\, a_x$$

El porqué del signo $\ominus$ de P_x es el siguiente: yo tomo el eje X con su origen en la posición de equilibrio. Pe equis apunta al revés, por lo tanto es negativa. Me queda:

$$-\cancel{m}\, g \operatorname{sen}\alpha = \cancel{m}\, a_x$$

$$\Rightarrow a_x = -g \operatorname{sen}\alpha$$

<u>2do TRUCO:</u>

Tenemos un movimiento tal que su aceleración es proporcional al <u>seno</u> del ángulo de separación de la posición de equilibrio y de sentido contrario. ($a = -g\ \underline{\operatorname{sen}\alpha}$).

Pero yo no quiero un proporcionalidad "con el seno del ángulo".

Para tener un movimiento armónico yo necesito que la aceleración sea proporcional a <u>alfa</u>, no a <u>seno de alfa</u>.

¿Qué hago?

Y bueno, en vez de tomar $\operatorname{sen}\alpha$, tomemos α en radianes, que es parecido.

<u>PREGUNTA</u>: ¿Se puede hacer esto?. Bueno, en realidad no. Pero uno puede suponer que las oscilaciones son muy chicas, es decir, de pequeña amplitud. En ese caso, a medida que el ángulo de separación disminuye, la diferencia entre alfa en radianes y seno de alfa se achica.

Este 2do truco me permite poner $a = -g \operatorname{sen} \alpha$ como:

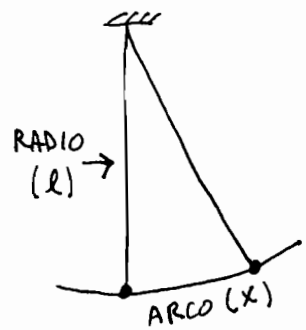
$$a = -g \cdot \alpha_{(RAD)}$$

Ahora sí puedo decir que tengo un movimiento armónico. (si la amplitud de las oscilaciones es chica y alfa es chico y toda la película).

Entonces como para los movimientos armónicos se cumple que la aceleración es $\ominus \omega^2 x$, reemplazo:

$$\cancel{-}\omega^2 x = \cancel{-}g\, \alpha_{(RAD)}$$

(Equis es la separación de la posición de equilibrio, es decir, la elongación). Por otra parte el ángulo α en radianes se puede poner como arco sobre radio.



$$\alpha_{(RAD)} = \frac{ARCO}{RADIO} = \frac{X}{l}$$

Entonces:

$$\omega^2 \cancel{X} = g \frac{\cancel{X}}{l} \Rightarrow \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow T^2 = (2\pi)^2 \frac{l}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

← PERÍODO DE UN PENDULO PARA OSCILACIONES DE PEQUEÑA AMPLITUD.

Vamos a analizar ahora la Frase "Pequeña amplitud".
¿Qué es pequeña amplitud?. ¿$\alpha = 10°$?. ¿$\alpha = 5°$?. ¿$\alpha = 1°$?
Es decir, ¿Para qué valores de α es válida la fórmula del período de un péndulo?
Bueno, la suposición básica que hicimos fue reemplazar sen α por α. Hagamos una tabla de valores y comparemos α con sen α:

α (Grados)	α (RAD)	sen α
15°	0,2617	0,2588
10°	0,1745	0,1736
8°	0,1396	0,1391
6°	0,1047	0,1045
4°	0,0698	0,0697
2°	0,0349	0,0349

← TABLA COMPARATIVA ENTRE ALFA Y SEN ALFA

$\text{sen}\,\alpha = \frac{x}{l}$ $\quad \alpha_{(rad)} = \frac{\text{Arco}}{l}$

La conclusión es que para $\alpha = 15°$ la diferencia entre α y sen α es de 0,003. (1%). Para 10° es de 0,0009 (0,5%).
Para 6° es de 0,0002 (0,2%).
Una medición con un error relativo del 1 porciento es una buena medición. Por lo tanto, para amplitudes de hasta 15° la fórmula anda bastante bien. Y si uno quiere ser exigente, puede tomar amplitudes de hasta 5 o 6 grados. Ahí el error relativo es del 0,2 porciento. (una medición excelente).
Ahora contestemos la otra parte de la pregunta:
¿De qué depende el período de un péndulo?

Bueno, siendo el período de un péndulo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, las únicas magnitudes que aparecen son la aceleración de la gravedad y la longitud del hilo. A medida que aumento la longitud del hilo aumenta el período. A medida que aumenta la gravedad del lugar, disminuye el período. (oscila más rápidamente).

¿Puede oscilar un péndulo en la luna?

RTA: sí, pero oscilará más lentamente. Es decir, su período será mayor. ($g_{luna} < g_{Tierra}$).

PREGUNTA: ¿oscila un péndulo en un lugar donde no hay gravedad?

(Lo siento, ésta tendrás que contestarla vos).

EPÍLOGO

Nosotros en su época no tomábamos movimiento armónico. No creo que ellos tampoco te lo tomen. Pero repito, tenés que saber este asunto porque es la puerta de entrada a ONDAS. A su vez, ondas te va a preparar para entrar en Interferencia y difracción. (y más adelante en electricidad y magnetismo).

Leé el resumen que está en la tapa. Si te resulta más o menos comprensible, podés seguir adelante.

FIN MOVIMIENTO ARMONICO.

© De desarrollo y soluciones.
Queda hecho el depósito que marca la ley.
Prohibida su reproducción total o parcial.